

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA  
DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA

**LÍMITES EN DESEMPEÑO PARA LAZOS  
MULTIVARIABLES CON CONTROLADORES DE  
ESTRUCTURA TRIANGULAR**

Tesis de Grado presentada por

**Diego Antonio Rojas Oyarzún**

como requisito parcial para optar al título de

**Ingeniero Civil Electrónico**

y al grado de

**Magíster en Ingeniería Electrónica**

Profesor Guía  
Dr. Mario Salgado Brocal

Valparaíso, 2006.

TÍTULO DE LA TESIS:

**LÍMITES EN DESEMPEÑO PARA LAZOS MULTIVARIABLES  
CON CONTROLADORES DE ESTRUCTURA TRIANGULAR**

AUTOR:

**DIEGO ANTONIO ROJAS OYARZÚN**

TRABAJO DE TESIS, presentado en cumplimiento parcial de los requisitos para el título de Ingeniero Civil Electrónico y el grado de Magíster en Ingeniería Electrónica de la Universidad Técnica Federico Santa María.

Dr. Mario Salgado B.

---

Dr. Juan Hernández S.

---

Dr. Andrés Guesalaga M.

---

Valparaíso, Enero de 2006.

*Por su fuerza, coraje y amor,*

*dedicado a Carmen Gloria*

---

---

# AGRADECIMIENTOS

A lo largo de la vida existen logros que son la concreción del esfuerzo personal y de un manejo apropiado de las habilidades individuales. Tal descripción sin duda es insuficiente para este trabajo. Éste es el desenlace de una historia de varios años que ha tenido altos y bajos, pero que en definitiva nunca habría visto la luz si no fuera por el cariño y apoyo incondicional de mi madre Carmen Gloria y mi hermano Orlando. Creo que juntos le hemos dado un sentido distinto a la palabra familia.

Junto con ellos, me es imposible dejar de mencionar a dos personas que han sido bastiones de apoyo importantes cuando todo parece desmoronarse: Guacolda, mi abuela materna y Eduardo, ante todo un gran amigo y un excelente compañero para mi madre.

Mi profesor Guía, don Mario Salgado B., definitivamente no puede estar ausente de estas líneas. Debo expresar mi más sincero agradecimiento por acogerme en la senda de la investigación y por todas esas grandes charlas sobre la vida, artesanos chinos y codornices. Esta tesis también es fruto de una estrecha cooperación con Eduardo Silva V., con el cual formamos un grupo de trabajo muy cómodo y eficiente (gracias a notables conversaciones de mediodía sobre casi cualquier cosa). Debo enfatizar que la gran mayoría de las contribuciones originales de este trabajo se deben a un trabajo cooperativo en el tema, y es necesario dar el crédito merecido.

El grupo de personas dentro del cual se está inmerso es el que muchas veces entrega la fuerza y el coraje para levantarse luego de un tropiezo. Por esto, quiero expresar mi más profundo agradecimiento aquellos que me son muy valiosos y que me hacen afortunado al tenerlos como amigos: Ismael Yulis, Pamela Guzmán, Pancho Henríquez, Bruno Mundaca, Pancho Márquez, Rodrigo Vizcarra, Rodrigo Novoa, Esteban Pinochet, Pancho Montero, Wendy González, César León y Alex Grote. A todos ustedes, muchas gracias.

Finalmente, sólo queda por mencionar que en ciertas ocasiones las ideas se suceden tan rápido una tras otra que es difícil condensarlas sin que alguna se quede en el tintero. Desde ya pido disculpas a aquellas personas que deban estar mencionadas aquí y que por distracción del autor no lo están.

---

---

# RESUMEN

La solución del problema de límites de desempeño en lazos de control multivariable (MIMO) con estructura restringida permite cuantificar cuál es el mejor desempeño alcanzable por un lazo de control con restricciones estructurales sobre el controlador. El problema de optimización cuadrática asociado es, en general, no convexo, por lo que su resolución explícita es difícil. En esta tesis se deriva una condición necesaria para la convexidad del problema y se entregan expresiones analíticas para el desempeño óptimo y el controlador que lo logra para tres estructuras de interés: diagonal por bloques, rala simple y triangular. Además, el carácter explícito de la solución permite identificar cuál es el deterioro en desempeño respecto al caso centralizado producto de las restricciones impuestas al control. Los resultados dejan de manifiesto que dicho deterioro depende de aquellos ceros de fase no mínima (FNM) que no cumplen cierta propiedad de estructura. Esto implica a su vez que el efecto de dichos ceros de FNM no está dado sólo por su ubicación, sino que también por rasgos direccionales que dan cuenta de las interacciones dinámicas entre algunos de los subsistemas que componen a la planta.

La convexidad del problema está garantizada si la planta tiene la misma estructura que aquella que se desea forzar sobre el controlador y ésta cumple una propiedad algebraica especial. Esto lleva a establecer condiciones bajo las cuales el controlador centralizado óptimo asociado a una planta estructurada posee la misma estructura que ésta en forma natural. La diagonalidad del interactor unitario de ceros generalizado aparece como un elemento crucial en este punto, por lo cual se establece una condición necesaria y suficiente para que esto ocurra y, además, se demuestra que éste es único.

Los procedimientos analíticos desarrollados en estos tópicos permiten establecer un método explícito de diseño de controladores de estructura triangular. La metodología propuesta sirve para plantas estables sin ninguna estructura en particular, permite incorporar criterios de diseño y no emplea ningún tipo de procedimiento numérico, por lo cual su utilidad puede ser considerable.

Finalmente, en el tema de parametrización de controladores estabilizantes y realizables, para una clase importante de plantas MIMO se deriva una forma analítica para una fun-

ción de sensibilidad complementaria que garantiza un lazo estable y realizable. Esta función depende sólo de rasgos dinámicos de la planta, por lo que puede ser computada por inspección de ésta y sin recurrir a ningún procedimiento de diseño. Esto último la perfila como una buena candidata para ser empleada en la parametrización de todos los controladores estabilizantes y realizables para plantas inestables.

**Palabras Clave:**

Control multivariable, control restringido, límites de desempeño, interactor de ceros, parametrización de controladores, diseño de controladores restringidos, control triangular.

---

---

# CONTENIDO

<b>AGRADECIMIENTOS</b>	<b>I</b>
<b>RESUMEN</b>	<b>II</b>
<b>1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
1.1. Estado del arte	1
1.1.1. Parametrización de controladores	1
1.1.2. Propiedades de factorizaciones de ceros en sistemas MIMO	2
1.1.3. Lazos de control MIMO con estructura restringida	3
1.2. Contribuciones importantes de la tesis	4
1.3. Organización del documento	5
<b>2. GENERALIDADES SOBRE SISTEMAS LINEALES</b>	<b>8</b>
2.1. Introducción	8
2.2. Sistemas MIMO lineales	8
2.2.1. Representación de sistemas MIMO	8
2.2.2. Rasgos dinámicos de un sistema MIMO: polos, ceros y retardos	9
2.2.3. Estabilidad de sistemas MIMO	13
2.2.4. Ejemplo	13
2.3. Matrices de transferencia y espacios de funciones	15
2.4. Factorizaciones de ceros en sistemas MIMO	18
2.4.1. Motivación	18
2.4.2. Interactor unitario de ceros	21
2.5. Lazo de control MIMO	25
2.5.1. Aspectos básicos	25
2.5.2. Requerimientos sobre el lazo	27
2.6. Estructuras de control MIMO	30
2.7. Conclusiones	32

---

<b>3. PARAMETRIZACIÓN DE CONTROLADORES</b>	<b>33</b>
3.1. Introducción	33
3.2. Parametrización clásica	34
3.3. Parametrización alternativa	36
3.4. Función de sensibilidad esencial	38
3.4.1. Motivación e idea de esencialidad	38
3.4.2. Caso SISO	39
3.4.3. Caso MIMO	42
3.5. Ejemplo	45
3.6. Conclusiones	48
<b>4. LÍMITES DE DESEMPEÑO EN CONTROL CENTRALIZADO</b>	<b>50</b>
4.1. Introducción	50
4.2. Definición del problema y medida de desempeño	51
4.3. Límite de desempeño	53
4.4. Conclusiones	56
<b>5. CONTROL CON ESTRUCTURA RESTRINGIDA</b>	<b>57</b>
5.1. Introducción	57
5.2. Motivación y estructuras de interés	58
5.3. El problema de límites en desempeño con estructura restringida	60
5.3.1. Dificultades asociadas al planteamiento general	60
5.3.2. Condiciones para la convexidad del problema	61
5.4. Propiedades estructurales de la solución centralizada	64
5.4.1. Propiedades del interactor unitario de ceros	64
5.4.2. Estructura de la solución centralizada	70
5.5. Conclusiones	72
<b>6. LÍMITES DE DESEMPEÑO EN CONTROL RESTRINGIDO</b>	<b>73</b>
6.1. Introducción	73
6.2. Estructura diagonal por bloques	74
6.3. Estructura rala simple	74
6.4. Estructura triangular	82
6.5. Conclusiones	94
<b>7. METODOLOGÍA DE DISEÑO DE CONTROLADORES TRIANGULARES</b>	<b>96</b>
7.1. Introducción	96
7.2. Descripción del método propuesto	97
7.2.1. Control triangular	97
7.2.2. Criterio de optimalidad	97

Resumen	VI
7.3. Diseño óptimo triangular para plantas triangulares	98
7.4. Control triangular de planta centralizada	103
7.5. Conclusiones	110
<b>8. CONCLUSIONES</b>	<b>112</b>
<b>A. ESPACIOS DE HILBERT</b>	<b>117</b>
A.1. Introducción	117
A.2. Espacios de Hilbert y de Banach	117
A.3. Espacios de funciones	122
A.3.1. El espacio $\mathcal{L}_2$	122
A.3.2. Subespacios importantes de $\mathcal{L}_2$	123
<b>NOTACIÓN Y SÍMBOLOS</b>	<b>125</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>128</b>

# INTRODUCCIÓN

El tema principal del presente trabajo de tesis se inscribe dentro de los sistemas de control lineal multivariables (MIMO) de tiempo discreto. Gran parte de los desarrollos y resultados aquí expuestos son fruto de un trabajo cooperativo con don Mario Salgado B. y Eduardo Silva V. en una investigación que tiene distintas aristas. Es por esto que los tópicos tratados se pueden clasificar en tres grandes áreas:

- Parametrización de controladores.
- Propiedades de factorizaciones de ceros en sistemas MIMO.
- Lazos de control MIMO con estructura restringida.

Los resultados principales de este trabajo se encuentran condensados en [1–3]. Dado que el alcance de cada uno de los temas mencionados es amplio, a continuación se presenta una revisión bibliográfica de cada uno en forma independiente. Se destaca que algunos de los comentarios respecto de la bibliografía pueden aparecer también en el capítulo en donde ésta sea relevante. Se ha decidido esto a fin de contextualizar mejor los contenidos de cada capítulo.

## 1.1. Estado del arte

### 1.1.1. Parametrización de controladores

A partir de la década del 60, la aparición de técnicas de control basadas en procedimientos de optimización motivó la búsqueda de formas de parametrizar los controladores estabilizantes y realizables para una determinada planta. El trabajo seminal en este tópico se encuentra reportado en [4, 5], en el cual los autores derivan la conocida parametrización de Youla. Esta parametrización puede formularse tanto para el caso SISO como MIMO y permite expresar en forma compacta todos los controladores propios que estabilizan a una planta en un lazo con realimentación negativa.

La parametrización de Youla ha probado ser de gran utilidad tanto para el diseño de controladores mediante la solución del conocido problema de calce de modelos [6–9], como

para la obtención de propiedades de lazos de control [10–13] que involucren la resolución de problemas de optimización. Esta utilidad tiene su base en el hecho que la formulación entrega expresiones afines en el parámetro para todas las funciones de sensibilidad del lazo [6], lo cual tiene ventajas considerables a la hora de resolver problemas de optimización que involucren a dichas funciones. Además, su formulación en variables de estado permite la resolución de los problemas de control generales en  $\mathcal{H}_2$  y  $\mathcal{H}_\infty$  [9, 14–16].

Los problemas que adolece esta parametrización residen en el hecho que si la planta es inestable, entonces las expresiones asociadas a las funciones de sensibilidad pueden ser de alto orden y, además, se requiere de la disponibilidad de un controlador estabilizante para poder parametrizar todos los demás. Recientemente, en [17] se propone una formulación alternativa de la parametrización basada en una expresión afín para la función de sensibilidad del lazo. Este planteamiento genera expresiones de menor orden para las funciones de sensibilidad y éstas tienen la ventaja de involucrar sólo aquellos rasgos dinámicos de la planta que imponen limitaciones fundamentales [6, 18], a saber, ceros de fase no mínima (FNM) y polos inestables. La parametrización alternativa ha sido empleada con éxito en el contexto de límites en desempeño en lazos de control con plantas inestables [13].

### 1.1.2. Propiedades de factorizaciones de ceros en sistemas MIMO

La factorización de ceros de una matriz de transferencia es una herramienta que permite capturar la porción no invertible (es decir, su estructura de ceros de FNM) de una determinada matriz de transferencia [6]. Estas herramientas reciben el nombre de matrices de interacción o simplemente, interactores. Los trabajos originales en este tema se remontan algunas décadas atrás y se pueden encontrar en [19] en el contexto de formas canónicas e invariantes para esquemas de realimentación lineal. En dicho trabajo se entrega un algoritmo para su construcción y se demuestra que cierta forma triangular del interactor es única. Esta formulación se emplea en [20] para construir predictores de horizonte finito y en [17] para proponer una versión alternativa de la parametrización de Youla. No obstante, diversas limitaciones de este tipo de interactores [21–23] ocasionan que no sean la mejor forma de capturar la estructura de retardos de un sistema. Estos resultados motivan que en [22] se proponga un interactor *nilpotente* que es la base para la construcción del interactor *unitario* descrito en [24]. Esta forma del interactor permite resolver el problema LQR [6, 25] singular para sistemas MIMO de tiempo discreto [24] y es de utilidad en el contexto de control de varianza mínima [23, 26]. En [23] se presenta un algoritmo para la estimación de dicho interactor unitario. En [10, 11, 27] se presentan algunos resultados parciales que son generalizados en [12, 28] y permiten establecer un algoritmo explícito para su construcción. Además, en [12] se demuestra que para el caso de ceros de FNM en infinito, el interactor unitario es único. El interactor unitario resulta útil para construir inversos aproximados estables de matrices de transferencia [6, 28] y es útil para resolver de manera explícita ciertos

problemas de optimización cuadrática en el contexto de límites de desempeño [10–13].

Estudios adicionales sobre la diagonalidad del interactor de ceros de una matriz de transferencia se pueden encontrar en [29, 30]. No obstante, las pruebas ahí presentadas no constituyen una caracterización explícita de las matrices que poseen interactor diagonal. La diagonalidad del interactor de ceros es importante en el contexto de desacople dinámico de sistemas MIMO [31] y pruebas de autocorrelación en control de varianza mínima [32].

### 1.1.3. Lazos de control MIMO con estructura restringida

Los métodos de diseño MIMO usualmente entregan controladores de tipo centralizado, es decir, controladores en los cuales cada entrada aplicada al proceso se genera con información de todas las variables medidas. Por diversos motivos [28, 33–35], se puede requerir restringir la estructura del control a fin de ganar simplicidad en la implementación y/o reducir costos. Una discusión acabada sobre el problema de restringir estructura en el control se puede encontrar en [33]. El primer paso en este tema corresponde a la selección de la estructura del controlador, tópico que se detalla a continuación.

#### Selección de estructura

La selección de una determinada estructura se realiza en base a herramientas que permiten discriminar que interacciones dinámicas del proceso son predominantes. Trabajos en este tema se pueden encontrar en abundancia y dentro de los principales están el arreglo de ganancia relativa (RGA) [36], el arreglo de ganancia relativa dinámico (DRGA) [37, 38], el índice de Niederlinsky (NI) [39] y la Matriz de Participación (MP) [34, 40]. Todas estas herramientas miden en base a cierto criterio la importancia relativa de las distintas interacciones dinámicas de la planta y así dan luces sobre cuál estructura en particular puede ser apropiada.

#### Límites de desempeño

Es intuitivamente claro que para una determinada planta ciertas estructuras de control pueden generar lazos de control de mejor calidad que otras. Mediante la definición de una medida representativa del desempeño (o calidad) del lazo, la búsqueda de formas de cuantificar el mejor desempeño alcanzable por una determinada estructura de control surge en forma natural.

Resultados recientes respecto a este tema cuando el controlador no tiene restricciones estructurales se pueden encontrar en [10–13, 28, 41–46]. No obstante, para el caso en que se restringe la estructura del controlador, el panorama es bastante distinto ya que el único estudio reportado se encuentra en [47]. En este trabajo se establece un algoritmo para obtener el desempeño óptimo asociado a control descentralizado suponiendo que el lazo restringido es estable. La naturaleza numérica del algoritmo presentado no entrega información alguna

respecto de cuáles son los rasgos dinámicos de la planta que limitan el mejor desempeño alcanzable.

### Diseño de controladores restringidos

Cuando el patrón de interacciones dinámicas de la planta justifica un determinada estructura de control, entonces se hace imperativo contar con métodos sistemáticos de diseño de controladores de estructura restringida. La estructura más estudiada es indiscutiblemente el control descentralizado y ha dado origen a una diversos trabajos [35, 48–60]. Para el caso de la estructura de control triangular, los resultados relativos a metodologías de diseño son escasos y carecen de generalidad. En [61, 62] los autores desarrollan métodos que permiten diseñar un controlador triangular óptimo para una planta triangular estable. En [63] se reporta un método interesante para el mismo caso basado en los procedimientos de síntesis secuencial [64–66]. Finalmente, en [55] se plantea un procedimiento de optimización que no requiere imponer ninguna estructura sobre la planta, pero no garantiza la estabilidad del lazo resultante.

## 1.2. Contribuciones importantes de la tesis

Esta tesis presenta contribuciones originales en varios de los aspectos mencionados en la sección anterior. A continuación se da una descripción somera de ellas.

- Parametrización de controladores.

En base a la idea de *esencialidad*, para una clase amplia de plantas MIMO se obtiene una forma explícita para una función de sensibilidad complementaria que garantiza un lazo estable y realizable. Esta función de sensibilidad puede ser calculada sólo en base a aquellos rasgos dinámicos de la planta que imponen limitaciones fundamentales [6, 18], lo cual permite elegirla sin necesidad de algún procedimiento de diseño. Esto a su vez implica que es útil para parametrizar todas los lazos estables y propios mediante la parametrización alternativa de Youla [17].

- Propiedades de factorizaciones de ceros en sistemas MIMO.

En esta tesis se demuestra que el interactor unitario de ceros generalizado es único y, además, se establece una condición necesaria y suficiente para que éste sea diagonal. Esta condición tiene relación con el hecho que los ceros de fase no mínima de la matriz sean de tipo *canónicos izquierdos*, concepto original de este trabajo.

- Lazos de control MIMO con estructura restringida.

Se demuestra que si la familia de matrices con la estructura en consideración tiene cierta propiedad algebraica (a saber, ser *estructuralmente cerrada bajo inversión*) y la

planta tiene la misma estructura que aquella que se desea sobre el control, entonces una condición necesaria y suficiente para que el controlador sea estructurado es que el parámetro de Youla asociado tenga dicha estructura. Esto asegura que el problema de optimización cuadrática asociado a límites de desempeño sea convexo y, a su vez, facilita la derivación de otros resultados originales:

- Límites de desempeño: se deja en evidencia que para plantas de estructura restringida estables, el controlador centralizado que logra el desempeño óptimo tiene la misma estructura *per se* si y sólo si el interactor de ceros unitario generalizado es diagonal. Esto es importante ya que caracteriza a aquellas plantas estructuradas en las cuales forzar la misma estructura en el control no tiene impacto sobre el desempeño óptimo.

Para el caso en que la planta no posea dicha propiedad, se entregan expresiones analíticas para el controlador restringido óptimo y para el deterioro del mejor desempeño producto de restringir el control considerando estructuras diagonal por bloques, rala simple y triangular. Los resultados en este tema son relevantes y ponen de manifiesto que la influencia de los ceros de fase no mínima en el mejor desempeño alcanzable no está dada sólo por la ubicación de estos, sino que aparece además un efecto que tiene relación con rasgos direccionales. Esta característica es propia del control con estructura restringida y marca una diferencia clara con respecto al caso de control centralizado.

- Diseño de controladores de estructura triangular: se propone una metodología sistemática de diseño de controladores triangulares para plantas estables. El método no requiere que la planta posea una estructura en particular ni emplea algoritmos numéricos para el cómputo del controlador. La posibilidad de ajustar el ancho de banda del lazo permite conseguir estabilidad en el lazo y el cumplimiento de otras especificaciones de diseño.

### 1.3. Organización del documento

A excepción de los conceptos básicos relativos a sistemas lineales y lazos de control por realimentación, el texto tiene la intención de ser autocontenido. En caso de ser necesario, para una exposición acabada respecto de la teoría de sistemas de control lineal se sugiere al lector consultar [6].

Los capítulos se organizan de una manera estándar, poniendo especial énfasis en contextualizar los contenidos en base a una introducción que incluye las referencias bibliográficas importantes. Además, se incluyen ejemplos ilustrativos en los puntos que sea necesario, especialmente aquellos que involucran definiciones y/o resultados originales. Cada capítulo incluye una sección dedicada a resaltar las conclusiones principales que se derivan de los

resultados obtenidos y en el capítulo final se hace una revisión global de éstas. Para no interrumpir el flujo de lectura, al final del escrito se expone un apéndice con conceptos importantes relativos a Análisis Funcional que son cruciales para la derivación de los resultados de este trabajo. A continuación se describe en forma sintética los contenidos de cada capítulo.

- *Capítulo 1:* Revisión del estado del arte, contribuciones principales del trabajo y aspectos generales sobre éste.
- *Capítulo 2:* Enuncia los aspectos sobre sistemas lineales MIMO y control realimentado que son de importancia para este escrito.
- *Capítulo 3:* Revisión de la parametrización de Youla de todos los controladores estabilizantes en su formulación clásica y la versión alternativa dada en [17]. Se deriva la función de sensibilidad complementaria esencial, que permite, para el caso de plantas inestables, parametrizar todas las funciones de sensibilidad de lazos estables y realizables sin la necesidad de recurrir a un procedimiento de diseño previo.
- *Capítulo 4:* Enumeración de los resultados principales relativos a límites de desempeño en control centralizado. Se define la medida de desempeño que será empleada en lo sucesivo y se entrega tanto el valor óptimo de ésta como el controlador que la logra.
- *Capítulo 5:* Se plantea el problema de límites de desempeño con estructura restringida en su forma general y se deja de manifiesto la no convexidad del mismo. Mediante la definición de la idea de matrices estructuralmente cerradas bajo inversión, se establece una condición necesaria y suficiente para que las restricciones estructurales sobre el controlador sean heredadas por el parámetro de Youla. Esto permite derivar una condición suficiente para la convexidad del problema de optimización. Además, se demuestra que el interactor unitario de ceros es único y, gracias a la noción de ceros canónicos izquierdos, se obtiene una condición necesaria y suficiente para la diagonalidad de éste. Este resultado permite entregar una caracterización general de aquellas plantas estables estructuradas para las cuales el controlador centralizado óptimo tiene la misma estructura en forma natural.
- *Capítulo 6:* En este capítulo se obtienen resultados explícitos para el mejor desempeño alcanzable en lazos de control con planta y controlador restringido a una estructura en particular (diagonal por bloques, rala simple y triangular). Además, se calcula el controlador óptimo que lo logra y se cuantifica el deterioro en el desempeño producto de las restricciones estructurales sobre el controlador.
- *Capítulo 7:* Se propone un procedimiento de diseño de controladores triangulares para plantas estables. La utilidad del método se deja en evidencia con ejemplos ilustrativos.

- *Capítulo 8:* Revisión general de las principales conclusiones que se derivan de los resultados del trabajo. Además, se entregan líneas generales para trabajos de investigación futuros que se desprenden de esta tesis.

# GENERALIDADES SOBRE SISTEMAS LINEALES

## 2.1. Introducción

En esta sección se compilan los resultados y definiciones teóricas relativas a sistemas lineales multivariados (MIMO) que son de utilidad para este trabajo. Por motivos de espacio, las nociones aquí incorporadas corresponden a las estrictamente necesarias para el entendimiento de esta tesis. Abundante material sobre el tema en general se puede encontrar en [6, 14, 15, 67, 68]. Los tópicos más específicos pueden ser encontrados en las referencias bibliográficas dadas en las secciones respectivas.

## 2.2. Sistemas MIMO lineales

### 2.2.1. Representación de sistemas MIMO

Un sistema de tiempo discreto, lineal, causal e invariante en el tiempo puede ser descrito como

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.2.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \quad (2.2.2)$$

donde  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^n$  es el *vector de entrada*,  $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n$  es el *vector de salidas*,  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^p$  es el *vector de estados* y  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  y  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

Las expresiones (2.2.1) y (2.2.2) representan la dinámica del sistema en términos de un conjunto de  $p$  ecuaciones recursivas de primer orden. Esta representación es útil para estudiar la dinámica de los estados internos del sistema. No obstante, si lo que interesa es analizar el comportamiento desde un punto de vista entrada/salida, se puede obtener una representación bastante más compacta. Aplicando la transformación  $\mathcal{Z}$  (ver por ejemplo, [6, 69]) a (2.2.1),

(2.2.2) y luego de un ligero trabajo algebraico se obtiene

$$\mathbf{Y}(z) = \left( \mathbf{C} (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \right) \mathbf{U}(z) \quad (2.2.3)$$

$$= \mathbf{G}(z)\mathbf{U}(z), \quad (2.2.4)$$

donde  $z \in \mathbb{C}$  es la variable compleja de la transformación,  $\mathbf{Y}(z) = \mathcal{Z}\{y(t)\}$ ,  $\mathbf{U}(z) = \mathcal{Z}\{u(t)\}$  y  $\mathbf{G}(z)$  se denomina *matriz de transferencia* del sistema.

La matriz de transferencia  $\mathbf{G}(z)$  condensa la dinámica del sistema desde una perspectiva entrada/salida. Los elementos de  $\mathbf{G}(z)$  son funciones racionales en la variable  $z$ , de modo tal que  $\mathbf{G}(z) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Si el sistema es escalar (SISO), esto es  $n = 1$ , entonces  $\mathbf{G}(z)$  se reduce al bien conocido concepto de función de transferencia [6].

Debe notarse que si bien tanto la representación en espacio de estados (2.2.1),(2.2.2) como la matriz de transferencia  $\mathbf{G}(z)$  describen a un mismo sistema, pueden existir diferencias entre ambas. En efecto, introduciendo la idea de controlabilidad y observabilidad [6, 67] se puede probar que ciertas dinámicas en (2.2.1) pueden no manifestarse en  $\mathbf{G}(z)$ . Este fenómeno tiene relación con posibles cancelaciones en  $\mathbf{G}(z)$  y, en general, ocasiona que la representación tipo matriz de transferencia pueda perder información relativa a la dinámica del sistema original.

### 2.2.2. Rasgos dinámicos de un sistema MIMO: polos, ceros y retardos

Es un hecho conocido que la dinámica entrada/salida de un sistema lineal SISO depende de los polos y ceros de su función de transferencia [6]. En este contexto, los polos y ceros de un sistema SISO se definen como las raíces de los polinomios denominador y numerador de la función de transferencia, respectivamente. La extensión de esta idea al caso de sistemas MIMO es algo más complicada y requiere de la definición de la llamada forma de Smith-McMillan de una matriz de transferencia [6, 67].

#### Lema 2.1 (Forma de Smith-McMillan)

Considérese una matriz de transferencia  $\mathbf{G}(z) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  escrita como

$$\mathbf{G}(z) = \frac{1}{p(z)} \mathbf{N}(z), \quad (2.2.5)$$

donde  $\mathbf{N}(z)$  es una matriz polinomial de rango  $r$  y  $p(z)$  es el mínimo común denominador de todos los elementos de  $\mathbf{G}(z)$ . Entonces existen matrices unimodulares<sup>1</sup>  $\mathbf{U}_1(z)$  y  $\mathbf{U}_2(z)$  tales que

$$\mathbf{G}(z) = \mathbf{U}_1(z) \mathbf{G}_{SM}(z) \mathbf{U}_2(z), \quad (2.2.6)$$

<sup>1</sup>Dícese de una matriz polinomial no singular con determinante constante.

donde

$$\mathbf{G}_{\text{SM}}(z) = \text{diag} \left\{ \frac{\epsilon_1(z)}{\delta_1(z)}, \dots, \frac{\epsilon_r(z)}{\delta_r(z)}, 0, \dots, 0 \right\}, \quad (2.2.7)$$

y  $\epsilon_i(z)$ ,  $\delta_j(z)$  son polinomios coprimos si  $i = j$ . La matriz  $\mathbf{G}_{\text{SM}}(z)$  corresponde a la forma de Smith-McMillan de  $\mathbf{G}(z)$ .

**Demostración:**

Ver [67] donde, además, se entrega un algoritmo para calcular explícitamente los polinomios  $\epsilon_i(z)$  y  $\delta_i(z)$ .

□□□

**Definición 2.1 (Polos y ceros MIMO)**

Dada una matriz de transferencia  $\mathbf{G}(z) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  y su forma de Smith-McMillan  $\mathbf{G}_{\text{SM}}(z)$ , entonces:

- (a) El polinomio de ceros finitos de  $\mathbf{G}(z)$  está dado por  $p_c(z) = \prod_{i=1}^r \epsilon_i(z)$ . Las raíces de este polinomio se definen como los ceros de la matriz de transferencia  $\mathbf{G}(z)$ . Similarmente, la multiplicidad algebraica de un cero de  $\mathbf{G}(z)$  se define como la multiplicidad que éste tiene en  $p_c(z)$ .
- (b) El polinomio de polos de  $\mathbf{G}(z)$  está dado por  $p_p(z) = \prod_{i=1}^r \delta_i(z)$ . Las raíces de este polinomio se definen como los polos de la matriz de transferencia  $\mathbf{G}(z)$ . Similarmente, la multiplicidad algebraica de un polo de  $\mathbf{G}(z)$  se define como la multiplicidad que éste tiene en  $p_p(z)$ .

Si bien la noción de polos y ceros para sistemas MIMO dada en la Definición 2.1 es precisa, ésta resulta engorrosa de manejar debido a la necesidad de construir la forma de Smith-McMillan de la matriz de transferencia. Una caracterización alternativa de estos importantes rasgos dinámicos se puede obtener mediante la generalización de los conceptos de numerador y denominador de funciones de transferencia heredados de la teoría de sistemas SISO. Esta generalización queda de manifiesto en el siguiente lema [6, 67, 68].

**Lema 2.2 (Polos, ceros y factorizaciones coprimas polinomiales)**

Sea la matriz de transferencia  $\mathbf{G}(z) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Entonces,

- (a) Siempre es posible realizar las factorizaciones coprimas

$$\mathbf{G}(z) = \mathbf{D}_I^{-1}(z) \mathbf{N}_I(z), \quad (2.2.8)$$

$$= \mathbf{N}_D(z) \mathbf{D}_D^{-1}(z), \quad (2.2.9)$$

donde  $\mathbf{N}_I(z)$ ,  $\mathbf{D}_I(z)$ ,  $\mathbf{N}_D(z)$  y  $\mathbf{D}_D(z)$  son matrices polinomiales. Las representaciones (2.2.8) y (2.2.9) se denominan factorizaciones coprimas polinomiales izquierda y derecha, respectivamente.

(b) Todo cero de  $\mathbf{G}(z)$  es también cero de  $\mathbf{N}_I(z)$  y  $\mathbf{N}_D(z)$ .

(c) Todo polo de  $\mathbf{G}(z)$  es también cero de  $\mathbf{D}_I(z)$  y  $\mathbf{D}_D(z)$ .

**Demostración:**

Ver [68, 70].

□□□

Debe enfatizarse que no es común en la literatura técnica usar el nombre *polinomial* para las factorizaciones coprimas definidas en el Lema 2.2(a). En esta tesis se incluye para efectos de distinguirlas de las factorizaciones coprimas en  $\mathcal{RH}_\infty$  definidas más adelante en la Sección 2.3. Además, hay que notar que la caracterización de polos y ceros dada en el Lema 2.2(b) y (c) es sólo en un sentido, es decir, no todos los ceros de  $\mathbf{D}_I(z)$  o  $\mathbf{D}_D(z)$  (ceros de  $\mathbf{N}_I(z)$  o  $\mathbf{N}_D(z)$ ) son polos (ceros) de la matriz de transferencia  $\mathbf{G}(z)$  (ver [6]).

El resultado del Lema 2.2 permite definir una característica dinámica exclusiva de los sistemas MIMO: la direccionalidad de ceros y polos.

**Definición 2.2 (Direcciones de polos y ceros)**

Sea  $\mathbf{G}(z) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  una matriz de transferencia con factorizaciones coprimas dadas por (2.2.8) y (2.2.9). Supóngase además que  $\mathbf{G}(z)$  tiene un cero en  $z = c$  y un polo en  $z = p$ , entonces:

(a) El cero en  $z = c$  tiene dirección izquierda  $\boldsymbol{\eta}_I \in \mathbb{C}^{n \times 1}$  y dirección derecha  $\boldsymbol{\eta}_D \in \mathbb{C}^{n \times 1}$  si y sólo si

$$\boldsymbol{\eta}_I^H \mathbf{N}_D(c) = \mathbf{0}, \quad (2.2.10)$$

$$\mathbf{N}_I(c) \boldsymbol{\eta}_D = \mathbf{0}, \quad (2.2.11)$$

con  $\|\boldsymbol{\eta}_I\| = \|\boldsymbol{\eta}_D\| = 1$ .

(b) El polo en  $z = p$  tiene dirección izquierda  $\boldsymbol{\mu}_I \in \mathbb{C}^{n \times 1}$  y dirección derecha  $\boldsymbol{\mu}_D \in \mathbb{C}^{n \times 1}$  si y sólo si

$$\boldsymbol{\mu}_I^H \mathbf{D}_D(c) = \mathbf{0}, \quad (2.2.12)$$

$$\mathbf{D}_I(c) \boldsymbol{\mu}_D = \mathbf{0}, \quad (2.2.13)$$

con  $\|\boldsymbol{\mu}_I\| = \|\boldsymbol{\mu}_D\| = 1$ .

De acuerdo a esta definición, entonces, en los sistemas MIMO los polos y ceros no están definidos sólo por su ubicación en el plano complejo, ya que adicionalmente tienen un vector dirección asociado. Una interpretación más clara de esta idea puede notarse a partir de (2.2.10)-(2.2.13):

- (a) Si  $z = c$  es un cero de  $\mathbf{G}(z)$ , entonces  $\mathbf{N}_I(c)$  y  $\mathbf{N}_D(c)$  son de rango deficiente y  $\boldsymbol{\eta}_I$ ,  $(\boldsymbol{\eta}_D)$  es un elemento de la base del espacio nulo izquierdo (derecho) de  $\mathbf{N}_D(c)$ ,  $(\mathbf{N}_I(c))$ .
- (b) Si  $z = p$  es un polo de  $\mathbf{G}(z)$ , entonces  $\mathbf{D}_D(p)$  y  $\mathbf{D}_I(p)$  son de rango deficiente y  $\boldsymbol{\mu}_I$ ,  $(\boldsymbol{\mu}_D)$  es un elemento de la base del espacio nulo izquierdo (derecho) de  $\mathbf{D}_I(p)$ ,  $(\mathbf{D}_D(p))$ .

La aparición de las direcciones asociadas a polos o ceros no debería llamar la atención teniendo en cuenta la naturaleza misma de los sistemas MIMO. En efecto, en forma análoga a la *propiedad de bloqueo* de los ceros de sistemas SISO [6], los ceros de sistemas MIMO (o polos para el caso del inverso del sistema) tienen una propiedad de bloqueo para *ciertas direcciones de la entrada*. Un desarrollo acabado sobre este tema se puede encontrar en [6, 7, 28, 71].

Para efectos de esta tesis, resulta de crucial importancia el concepto de *ceros de fase (no) mínima* definido a continuación.

### Definición 2.3 (Ceros de fase no mínima)

Sea  $\mathbf{G}(z) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  con un cero en  $z = c$ . El cero en  $z = c$  se denomina de fase mínima (FM) si y sólo si  $|c| < 1$ ; en caso contrario el cero se denomina de fase no mínima (FNM). Además, si  $\mathbf{G}(z)$  posee sólo ceros de FM (FNM), se denomina sistema de FM (FNM).

Otra característica dinámica importante de los sistemas dinámicos son los retardos. Para el caso de sistemas de tiempo continuo estos rasgos dificultan la teoría ya que fuerzan a que la dinámica del sistema sea de orden infinito [6]. Sin embargo, para el caso de tiempo discreto su tratamiento es bastante simple y no constituye un mayor complicación con respecto a las definiciones que ya hemos realizado. En efecto, los retardos en tiempo discreto agregan un número finito de estados a la representación (2.2.1), traduciéndose en polos en el origen y ceros adicionales en la matriz de transferencia [6, 72]. Esta tesis presenta un tratamiento unificado respecto a este punto, lo cual queda de manifiesto en la siguiente observación.

### Observación 2.1 (Retardos y ceros en infinito)

Los retardos en sistemas de tiempo discreto se traducen en polos de  $\mathbf{G}(z)$  ubicados en  $z = 0$  y ceros finitos adicionales (cuando el retardo es fraccionario respecto del período de muestreo). En esta tesis los retardos se tratan de manera unificada usando el hecho que un polo en  $z = 0$  es equivalente a un cero de FNM ubicado en  $z \rightarrow \infty$ . En relación con la Definición 2.2, si  $\mathbf{G}(z)$  tiene un cero en infinito, esta idea se entiende en el límite, es decir

$$\mathbf{K}_I = \lim_{z \rightarrow \infty} \mathbf{N}_I(z), \quad (2.2.14)$$

$$\mathbf{K}_D = \lim_{z \rightarrow \infty} \mathbf{N}_D(z), \quad (2.2.15)$$

son matrices de rango deficiente. Las direcciones asociadas a los ceros en infinito se entienden de manera similar a la Definición 2.2(a) usando  $\mathbf{K}_I$  y  $\mathbf{K}_D$  en vez de  $\mathbf{N}_I(z)$  y  $\mathbf{N}_D(z)$ . Además, si  $n_p$  ( $n_c$ ) es el número de polos (ceros) de  $\mathbf{G}(z)$ , entonces se define el grado relativo de  $\mathbf{G}(z)$  como  $g_{rel}\{\mathbf{G}(z)\} = n_p - n_c = \det\{\mathbf{G}(z)\}$  y es igual al número de ceros en  $\infty$  de  $\mathbf{G}(z)$ .

Para concluir esta sección, se presentan algunas definiciones de terminología que extienden conceptos conocidos de sistemas SISO al caso de los sistemas MIMO usando las ideas expuestas previamente.

**Definición 2.4 (Matrices propias e impropias)**

Sea  $\mathbf{G}(z) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ .  $\mathbf{G}(z)$  se dice:

- (a) propia si y sólo si  $g_{rel}\{\mathbf{G}(z)\} \geq 0$ ,
- (b) estrictamente propia si y sólo si  $g_{rel}\{\mathbf{G}(z)\} > 0$ ,
- (c) bipropia si y sólo si  $g_{rel}\{\mathbf{G}(z)\} = 0$ ,
- (d) impropia si  $g_{rel}\{\mathbf{G}(z)\} < 0$ .

**2.2.3. Estabilidad de sistemas MIMO**

La estabilidad es un concepto crucial en teoría de sistemas y se define a continuación.

**Definición 2.5 (Estabilidad de sistemas)**

Una sistema lineal e invariante en el tiempo se dice estable si su salida permanece acotada para cualquier entrada y condición inicial acotadas.

La caracterización de los sistemas MIMO estables se extiende de manera directa desde el caso SISO, como lo expone el siguiente resultado.

**Lema 2.3 (Estabilidad de una matriz de transferencia)**

Un sistema de tiempo discreto, lineal e invariante en el tiempo descrito por su matriz de transferencia  $\mathbf{G}(z) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  es estable si y sólo si todos su polos están en la región  $|z| < 1$ .

En lo sucesivo y con un ligero abuso de lenguaje, si  $\mathbf{G}(z)$  tiene un polo en  $z = p$ , diremos que es un polo estable (inestable) si  $|p| < 1$  ( $|p| \geq 1$ ).

**2.2.4. Ejemplo**

El siguiente ejemplo numérico ilustra los conceptos discutidos en las secciones anteriores.

**Ejemplo 2.1:** *Considérese la matriz de transferencia*

$$\mathbf{G}(z) = \begin{bmatrix} \frac{z-2}{z} & \frac{z-2}{z^2} \\ \frac{z+4}{z+0.56} & \frac{5}{z} \end{bmatrix} \quad (2.2.16)$$

Empleando el algoritmo descrito en [6, 67, 68] la forma de Smith-McMillan de  $\mathbf{G}(z)$  resulta

$$\mathbf{G}_{SM}(z) = \begin{bmatrix} \frac{25}{(z^2(25z+14))} & 0 \\ 0 & 0,1(z-2)(10z-3) \end{bmatrix}, \quad (2.2.17)$$

lo cual indica que  $\mathbf{G}(z)$  tiene tres polos en  $\{0, 0, -0.56\}$  y dos ceros en  $\{2, 0.3\}$ . Esto implica que  $g_{rel} \{\mathbf{G}(z)\} = 1$  y, por ende, es estrictamente propia y tiene un cero en  $\infty$ . Con un ligero abuso de notación, el conjunto de ceros de FNM de  $\mathbf{G}(z)$  puede escribirse como  $\{2, \infty\}$ . La factorización coprime polinomial derecha de  $\mathbf{G}(z)$  se obtiene en base al procedimiento descrito en [68] y resulta

$$\mathbf{N}_D(z) = \begin{bmatrix} (z-2)(z+0.56) & z-2 \\ z(z+4) & 5z \end{bmatrix}, \quad (2.2.18)$$

$$\mathbf{D}_D(z) = \begin{bmatrix} z(z+0.56) & 0 \\ 0 & z^2 \end{bmatrix}. \quad (2.2.19)$$

Además, a continuación se calcula en forma explícita algunas de las direcciones izquierdas asociadas a los polos y ceros de  $\mathbf{G}(z)$ :

- Para el cero en  $c_1 = 2$  se tiene

$$\mathbf{N}_D(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 12 & 10 \end{bmatrix}, \quad (2.2.20)$$

por lo tanto  $\boldsymbol{\eta}_{I1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ .

- Para el cero en  $c_2 = \infty$  se tiene

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \mathbf{N}_D(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.2.21)$$

$$\text{por lo tanto } \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{I}\mathbf{2}} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}^T.$$

Para el polo en  $p_1 = -0.56$  se tiene

$$\mathbf{D}_{\mathbf{D}}(p_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p_1^2 \end{bmatrix}, \quad (2.2.22)$$

$$\text{por lo tanto } \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{I}\mathbf{1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

■

### 2.3. Matrices de transferencia y espacios de funciones

En esta sección se relacionan los conceptos de Análisis Funcional expuestos en el Apéndice A con las ideas relativas a sistemas lineales que serán de utilidad a lo largo de esta tesis. Debe destacarse que dichas herramientas matemáticas son claves para la obtención de los resultados de este trabajo y constituyen la herramienta técnica fundamental para la construcción de sus principales contribuciones.

Para efectos de la teoría de sistemas y señales, la definición del espacio  $\mathcal{L}_2$  en el Apéndice A puede ser interpretada de dos maneras distintas que se precisan a continuación.

#### Observación 2.2 (Interpretación de $\mathcal{RL}_2$ )

(a) Sea  $\mathbf{F}(z) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  una matriz de transferencia racional en  $z$ . De acuerdo a la parte (a) de la Definición A.15, si  $\mathbf{F}(z)$  no tiene polos en  $|z| = 1$ , entonces  $\mathbf{F}(z) \in \mathcal{RL}_2$ . En estas condiciones,  $\mathcal{RL}_2$  puede ser visto como un espacio de sistemas lineales de tiempo discreto.

(b) Sea  $\mathbf{f}(t) \in \mathbb{R}^n$  una señal de tiempo discreto tal que  $\mathbf{F}(z) = \mathcal{Z}\{\mathbf{f}(t)\}$ . Si  $\mathbf{F}(z)$  está bien definida  $\forall z \in \mathbb{C}$  tal que  $|z| = 1$ , entonces  $\mathbf{F}(z) \in \mathcal{RL}_2$ . En estas condiciones,  $\mathcal{RL}_2$  puede ser visto como un espacio de señales de tiempo discreto.

Se recalca que si bien en términos operatorios la distinción anterior no es necesaria, ésta tiene importancia conceptual y debe tenerse siempre presente. En lo sucesivo, no se precisará sobre la naturaleza de los elementos en  $\mathcal{RL}_2$  ya que ésta siempre se puede deducir del contexto en el cual se esté trabajando.

En base a los resultados del Lema A.4, la ortogonalidad de  $\mathcal{RH}_2$  y  $\mathcal{RH}_2^\perp$  permite establecer que para cualquier matriz de transferencia  $\mathbf{G}(z) \in \mathcal{RL}_2$  se puede hallar una des-

composición ortogonal de la forma

$$\mathbf{G}(z) = [\mathbf{G}(z)]_2 + [\mathbf{G}(z)]_\perp \quad (2.3.1)$$

donde  $[\mathbf{G}(z)]_2 \in \mathcal{RH}_2$  y  $[\mathbf{G}(z)]_\perp \in \mathcal{RH}_2^\perp$ . Nótese que de acuerdo a la definición de  $\mathcal{RH}_2$  y  $\mathcal{RH}_2^\perp$  en el Lema A.4, las matrices de transferencia que pertenecen a  $\mathcal{RH}_2$  son estables y estrictamente propias. Por otro lado, si  $\mathbf{G}(z)$  es bipropia o impropia y tiene sólo polos inestables, entonces  $\mathbf{G}(z) \in \mathcal{RH}_2^\perp$ . Esto implica que la descomposición ortogonal (2.3.1) se puede realizar mediante un expansión en fracciones parciales apropiada de  $\mathbf{G}(z)$  y reconociendo aquellos términos que están en  $\mathcal{RH}_2$  o  $\mathcal{RH}_2^\perp$  en base a la ubicación de sus polos y su grado relativo.

A fin de simplificar la notación en los desarrollos futuros, se define el espacio  $\mathcal{RH}_\infty$  como sigue.

$$\mathcal{RH}_\infty = \{\mathbf{G}(z) \in \mathcal{RL}_2 : \mathbf{G}(z) \text{ es estable y propia}\} \quad (2.3.2)$$

El espacio  $\mathcal{RH}_\infty$  es un subespacio de  $\mathcal{RL}_2$  y su nombre proviene del hecho que todas las matrices de transferencia que están en  $\mathcal{RH}_\infty$  tienen norma  $\infty$  definida. Más detalles sobre este espacio se pueden encontrar en [14]. Toda matriz de transferencia en  $\mathcal{RH}_\infty$  tiene una parte en  $\mathcal{RH}_2^\perp$  (su porción constante) y otra en  $\mathcal{RH}_2$  (su porción estrictamente propia). Finalmente, aprovechando la definición de  $\mathcal{RH}_\infty$  se presenta el siguiente lema referente a las factorizaciones coprinas que usaremos a lo largo de este escrito y que es una extensión del Lema 2.2.

**Lema 2.4 (Factorizaciones coprinas en  $\mathcal{RH}_\infty$ )**

*Sea la matriz de transferencia  $\mathbf{G}(z) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , entonces siempre es posible realizar las factorizaciones coprinas*

$$\mathbf{G}(z) = \mathbf{D}_I^{-1}(z)\mathbf{N}_I(z), \quad (2.3.3)$$

$$= \mathbf{N}_D(z)\mathbf{D}_D^{-1}(z), \quad (2.3.4)$$

donde  $\mathbf{N}_I(z)$ ,  $\mathbf{D}_I(z)$ ,  $\mathbf{N}_D(z)$  y  $\mathbf{D}_D(z)$  son matrices de transferencia en  $\mathcal{RH}_\infty$ . Las representaciones (2.3.3) y (2.3.4) se denominan factorizaciones coprinas en  $\mathcal{RH}_\infty$  izquierda y derecha, respectivamente.

**Demostración:**

La demostración de este importante resultado se puede hallar en [73].

□□□

El resultado del Lema 2.4 es muy útil para la derivación de los resultados del Capítulo 3. Si  $\mathbf{G}(z)$  es propia, entonces la obtención de una factorización coprime en  $\mathcal{RH}_\infty$  para  $\mathbf{G}(z)$  se puede realizar en forma computacional mediante la resolución de un problema de realimentación del estado observado equivalente, tal y como se detalla en [6]. Las nociones de polos y ceros (y sus respectivas direcciones) dadas en el Lema 2.2 y en la Definición 2.2 se extienden de manera directa al caso en que se emplean factorizaciones coprimas en  $\mathcal{RH}_\infty$  en vez de polinomiales. En lo sucesivo, siempre trabajaremos con factorizaciones coprimas en  $\mathcal{RH}_\infty$  debido a que pueden ser manipuladas de manera conveniente usando las propiedades del espacio  $\mathcal{RL}_2$ .

El siguiente ejemplo numérico ilustra las ideas discutidas más arriba.

**Ejemplo 2.2:** *Considérese la matriz de transferencia*

$$\mathbf{G}(z) = \begin{bmatrix} \frac{z^3}{(z-2)(z-0.5)} & \frac{1}{(z-3)} \\ \frac{1}{(z-0.8)} & \frac{z}{(z-0.5)} \end{bmatrix} \in \mathcal{RL}_2 \quad (2.3.5)$$

Mediante una expansión en fracciones parciales se obtiene la descomposición ortogonal en  $\mathcal{L}_2$  para  $\mathbf{G}(z)$  como

$$\mathbf{G}(z) = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{-0.083333}{(z-0.5)} & 0 \\ \frac{1}{(z-0.8)} & \frac{0.5}{(z-0.5)} \end{bmatrix}}_{=[\mathbf{G}(z)]_2 \in \mathcal{RH}_2} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{(z^2 + 0.5z + 0.3333)}{(z-2)} & \frac{1}{(z-3)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=[\mathbf{G}(z)]_\perp \in \mathcal{RH}_2^\perp} \quad (2.3.6)$$

Por otro lado, usando el procedimiento descrito en [6] los factores coprimos izquierdo y derecho en  $\mathcal{RH}_\infty$  para  $[\mathbf{G}(z)]_2$  son

$$\mathbf{N}_I(z) = \frac{1}{p(z)} \begin{bmatrix} -0.083(z - 0.6523)(z - 0.4091) & 0.0095(z - 0.8) \\ (z - 0.5128)(z - 0.488) & 0.5(z - 0.8)(z - 0.4979) \end{bmatrix}, \quad (2.3.7)$$

$$\mathbf{D}_I(z) = \frac{1}{p(z)} \begin{bmatrix} (z - 0.2724)(z - 0.5)(z - 0.5608) & 0.019(z - 0.8)(z - 0.5) \\ 0.034(z - 0.4462)(z - 0.5) & (z - 0.8)(z - 0.5)(z - 0.4979) \end{bmatrix}, \quad (2.3.8)$$

$$N_D(z) = \frac{1}{p(z)} \begin{bmatrix} -0.083(z - 0.8)(z - 0.4425) & 0.0093(z - 0.8) \\ (z - 0.5363)(z - 0.4959) & 0.5(z - 0.6165)(z - 0.4955) \end{bmatrix}, \quad (2.3.9)$$

$$D_D(z) = \frac{1}{p(z)} \begin{bmatrix} (z - 0.5)(z - 0.4425)(z - 0.8) & -0.11(z - 0.8)(z - 0.5) \\ -0.18(z - 0.5)(z - 0.4983) & (z - 0.3841)(z - 0.5)(z - 0.5045) \end{bmatrix}, \quad (2.3.10)$$

$$p(z) = (z - 0.5648)(z - 0.4957)(z - 0.2706). \quad (2.3.11)$$

■

## 2.4. Factorizaciones de ceros en sistemas MIMO

Las contribuciones más importantes de esta tesis descansan en la factorización de ceros para una determinada matriz de transferencia. Esto se realiza mediante la construcción del *interactor de ceros* y constituye el tema principal de esta sección. El desarrollo de los interactores de ceros se remonta algunas décadas atrás con los estudios originales reportados en [19]. Los diversos problemas que adolecen los interactores definidos en dicho trabajo son detallados en [21–23] y para superarlos en [24] se propone el interactor *unitario* basado en los resultados de [22]. Un algoritmo para la estimación del interactor unitario se entrega en [23] y la forma explícita se obtiene en [12] por medio de una generalización de los resultados parciales en [10, 11, 27]. El enfoque empleado en esta tesis respecto a este tema se basa principalmente en [12, 28].

### 2.4.1. Motivación

#### Caso SISO

Tal y como se expone de manera exhaustiva en [6], la construcción de inversos de sistemas es un elemento inevitablemente presente en la teoría de control. Ahora bien, es conocido que la dificultad de inversión de sistemas se debe a que usualmente el inverso de una matriz de transferencia es impropio y/o, en caso que el sistema sea de FNM, inestable. Esto motiva idear una metodología sistemática para la construcción de *inversos aproximados estables* de sistemas lineales.

Consideremos por simplicidad un sistema SISO de tiempo discreto con función de transferencia

$$f(z) = \frac{z - 3}{(z - 0.5)(z - 0.1)} \in \mathcal{RH}_2, \quad (2.4.1)$$

del cual se desea construir un inverso aproximado  $\tilde{f}^{-1}(z)$ . El inverso exacto de  $f(z)$  es

$$f^{-1}(z) = \frac{(z - 0.1)(z - 0.5)}{z - 3} \in \mathcal{RH}_2^\perp, \quad (2.4.2)$$

el cual ciertamente es impropio e inestable. Una forma conveniente de solucionar el problema de grado relativo es incluir un polo en  $z = 0$  en la construcción del inverso. Dicho factor tiene una respuesta en frecuencia unitaria y, por ende, su inclusión no afecta la magnitud de la respuesta en frecuencia del inverso aproximado con respecto a  $f^{-1}(z)$ . Por otro lado, el problema de estabilidad se puede sobrellevar si se hace una consideración similar: si el factor que agrega el polo inestable en  $z = 3$  se cambia por uno que incluya el reflejo estable de dicho polo, tampoco se altera la magnitud de la respuesta en frecuencia del inverso aproximado. Este análisis permite establecer que el inverso aproximado

$$\tilde{f}^{-1}(z) = \frac{(z - 0.1)(z - 0.5)}{z(1 - 3z)} \in \mathcal{RH}_\infty \quad (2.4.3)$$

tiene una respuesta en frecuencia de magnitud idéntica a aquella de  $f^{-1}(z)$ . Diremos entonces que

$$\xi_f(z) = \frac{z(1 - 3z)}{z - 3} \in \mathcal{RH}_2^\perp, \quad (2.4.4)$$

es un interactor de ceros de  $f(z)$  ya que factoriza el cero en  $\infty$  y en  $z = 3$  de  $f(z)$  en el sentido que  $\tilde{f}(z) = \xi_f(z)f(z)$  no posee dichos ceros. La metodología expuesta en este ejemplo simple se puede generalizar de manera simple a cualquier planta SISO<sup>2</sup>: basta con agregar tantos polos en  $z = 0$  en el inverso como grado relativo tenga  $f(z)$  y cambiar todos los ceros de FNM de  $f(z)$  por sus respectivos reflejos estables.

Otro modo de visualizar el procedimiento anterior para hallar el interactor  $\xi_f(z)$  es pensar en hallar una función de transferencia en  $\mathcal{RH}_2^\perp$  que *cancele* los ceros de FNM de  $f(z)$  y los *reemplace* por sus respectivos reflejos estables. De este modo, para cancelar un cero de FNM en  $\infty$ ,  $\xi_f(z)$  necesariamente debe contener un cero en  $z = 0$  y, de la misma manera, debe contener como polo al cero de FNM de  $f(z)$  y como cero al reflejo estable de éste.

### Extensión de la idea al caso MIMO

La idea es poder extender el concepto recién expuesto para sistemas escalares a sistemas MIMO. Como es de esperar, la construcción es ciertamente más complicada debido al fenómeno de direccionalidad de los ceros discutido al comienzo de este capítulo. A continuación se expone una forma intuitiva de construcción de un interactor de ceros MIMO.

<sup>2</sup>siempre y cuando  $f(z)$  no tenga ceros en la circunferencia unitaria, ya que en ese caso los reflejos son inestables.

Se enfatiza que el análisis que sigue es de tipo intuitivo y no pretende en absoluto ser una exposición formal del tema (vista en la sección siguiente). Considérese la matriz de transferencia

$$\mathbf{G}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{(z-4)}{z} & \frac{(z-2)}{z} \end{bmatrix}, \quad (2.4.5)$$

que tiene un cero de FNM en  $z = 2$  con dirección izquierda normalizada  $\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}^T$ . Construir una matriz de transferencia que cancele dicho cero de FNM no parece ser directo. No obstante, dada la forma de  $\mathbf{G}(z)$ , podemos pensar en *concentrar* el cero en una fila a fin de poder cancelarlo. Esto se puede conseguir si se multiplica a  $\mathbf{G}(z)$  por una matriz que reubique el factor  $(z - 2)$  en, por ejemplo, todos los elementos de la primera fila. Si construimos una matriz  $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta} & \mathbf{U} \end{bmatrix}$  de modo tal que  $\mathbf{U}$  se elige para que  $\mathbf{P}$  sea unitaria<sup>3</sup>, se puede conseguir lo deseado. En efecto, una posible elección para  $\mathbf{P}$  es

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad (2.4.6)$$

con lo cual el producto  $\mathbf{P}^T \mathbf{G}(z)$  resulta

$$\mathbf{P}^T \mathbf{G}(z) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}(z-2)}{z} & \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(z-2)}{z} \\ -\frac{2\sqrt{2}}{z} & \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(z-2)}{z} \end{bmatrix}. \quad (2.4.7)$$

Como ahora el cero en  $z = 2$  está en cada uno de los elementos de la primera fila, podemos cancelarlo y reemplazarlo por su reflejo estable sin problemas si premultiplicamos a  $\mathbf{P}^T \mathbf{G}(z)$  por una matriz de transferencia diagonal  $\mathbf{M}(z)$  elegida como

$$\mathbf{M}(z) \mathbf{P}^T \mathbf{G}(z) = \begin{bmatrix} \frac{1-2z}{z-2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}(z-2)}{z} & \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(z-2)}{z} \\ -\frac{2\sqrt{2}}{z} & \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(z-2)}{z} \end{bmatrix} \quad (2.4.8)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-2\sqrt{2}(z-0.5)}{z} & \frac{-\sqrt{2}(z-0.5)}{z} \\ -\frac{2\sqrt{2}}{z} & \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(z-2)}{z} \end{bmatrix}. \quad (2.4.9)$$

<sup>3</sup>Esto se puede hacer con el algoritmo de ortonormalización de Gram-Schmidt, ver [74].

Se puede notar que la matriz  $\mathbf{M}(z)\mathbf{P}^T\mathbf{G}(z)$  no tiene el cero en  $z = 2$ , por lo cual sólo resta *deshacer* los cambios hechos con la matriz  $\mathbf{P}^T$  premultiplicando por su inversa, a saber,  $\mathbf{P}^{-T}$ . Sin embargo, como  $\mathbf{P}^T$  es unitaria esto último es equivalente a premultiplicar por  $\mathbf{P}$ . Luego de este procedimiento resulta que la matriz

$$\mathbf{PM}(z)\mathbf{P}^T\mathbf{G}(z) = \begin{bmatrix} \frac{-2(z-1.5)}{z} & \frac{-1.5(z-1)}{z} \\ \frac{-2(z+0.5)}{z} & \frac{-0.5(z+1)}{z} \end{bmatrix}, \quad (2.4.10)$$

no tiene el cero en  $z = 2$ , tiene un cero en  $z = 0.5$  y posee la misma ganancia a continua que  $\mathbf{G}(z)$ . La matriz  $\mathbf{PM}(z)\mathbf{P}^T$ , entonces, cancela el cero de FNM en  $z = 2$  de  $\mathbf{G}(z)$  y lo reemplaza por su reflejo estable. Debe notarse que en base a la construcción de dicha matriz, ésta se puede escribir de dos maneras compactas como sigue

$$\mathbf{PM}(z)\mathbf{P}^T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta} & \mathbf{U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1-3z}{z-3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}^T \\ \mathbf{U}^T \end{bmatrix} \quad (2.4.11)$$

$$= \frac{1-3z}{z-3} \boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}^T + \mathbf{U}\mathbf{U}^T \quad (2.4.12)$$

En la sección siguiente se generaliza formalmente la idea recién descrita para la construcción de un interactor de ceros.

### 2.4.2. Interactor unitario de ceros

Antes de enunciar el método mediante el cual se construye el interactor unitario de ceros, se hace necesario hacer algunas definiciones formales de éste y otros conceptos relacionados que usaremos a lo largo de esta tesis.

#### Definición 2.6 (Factorizaciones de ceros y tipos de interactores)

Sea  $\mathbf{A}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$  no singular casi en todas partes (c. e. t. p.) y defínase su conjunto de ceros de FNM (contando multiplicidades) como  $\mathcal{C}$ . Entonces:

- (a) Factorizar un cero en  $z = c \in \mathcal{C}$  con multiplicidad algebraica  $\alpha_c$  es equivalente a construir una matriz  $\mathbf{L}(z)$  no singular c. e. t. p. tal que  $\mathbf{A}(z) = \mathbf{L}(z)^{-1}\mathbf{B}(z)$  y  $\mathbf{B}(z)$  tiene el cero en  $z = c$  con multiplicidad  $\alpha_c - 1$ . En otras palabras, la matriz  $\mathbf{L}(z)$  extrae un cero en  $z = c$ .
- (b) Si  $\mathbf{A}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$ , entonces nos referiremos a la matriz  $\mathbf{L}(z)$  como el interactor izquierdo de ceros generalizado (GLI) si y sólo si  $\mathbf{L}(z)$  es no singular c. e. t. p. y FM tal que  $\mathbf{L}(z)\mathbf{A}(z)$  es bipropia, FM y estable. En otras palabras, un GLI extrae todos los ceros de FNM de  $\mathbf{A}(z)$ .

- (c) Si la matriz  $\mathbf{L}(z)$  es un GLI y además es unitario y de ganancia a continua identidad, esto es  $\mathbf{L}(1) = \mathbf{I}$ , se denomina interactor unitario izquierdo de ceros generalizado (GLUI). El GLUI asociado a la matriz de transferencia  $\mathbf{A}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$  será denotado por  $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{A}}(z)$ .
- (d) Si  $\mathbf{A}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$  y  $\mathcal{C}^p = \{c_1, c_2, \dots, c_p\} \subset \mathcal{C}$  es un subconjunto de los ceros de FNM de  $\mathbf{A}(z)$ , entonces nos referiremos a la matriz  $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{A}}^{\mathcal{C}^p}(z)$  como el interactor de ceros unitario izquierdo (LUI) asociado a  $\mathcal{C}^p$  si y sólo si es no singular c. e. t. p., FM, unitaria, tiene ganancia a continua identidad y factoriza en  $\mathbf{A}(z)$  todos los ceros de  $\mathcal{C}^p$ . En otras palabras, la matriz  $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{A}}^{\mathcal{C}^p}(z)\mathbf{A}(z)$  no contiene ninguno de los ceros de FNM en  $\mathcal{C}^p$ .

En lo sucesivo nos interesarán sólo los interactores unitarios (GLUI y LUI) debido a que tienen la propiedad enunciada en la Definición A.16(a), fundamental para los desarrollos posteriores. El lema expuesto a continuación entrega las condiciones para la existencia del GLUI y el procedimiento general su construcción. Esta construcción está basada en los resultados de [2, 12, 75] y se puede aplicar, *mutatis mutandis*, a la construcción de LUI.

**Lema 2.5 (Interactor unitario izquierdo de ceros)**

Sea  $\mathbf{A}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$  no singular c. e. t. p., entonces  $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{A}}(z)$  existe si y sólo si  $\mathbf{A}(z)$  no tiene ceros sobre la circunferencia unitaria. Además, si  $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \dots, c_{n_c}\}$  es el conjunto de ceros de FNM (contando multiplicidades) de  $\mathbf{A}(z)$ , entonces  $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{A}}(z)$  se puede construir como

$$\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{A}}(z) = \prod_{i=1}^{n_c} \mathbf{L}_{n_c-i+1}(z) \in \mathcal{RH}_2^\perp, \quad (2.4.13)$$

donde

$$\mathbf{L}_i(z) = f_i(z)\boldsymbol{\eta}_i\boldsymbol{\eta}_i^H + \mathbf{U}_i\mathbf{U}_i^H, \quad f_i(z) = \begin{cases} \frac{(1-z\bar{c}_i)(1-c_i)}{(z-c_i)(1-\bar{c}_i)} & \text{si } |c_i| < \infty \\ z & \text{si } c_i = \infty \end{cases}, \quad (2.4.14)$$

con  $\boldsymbol{\eta}_i$  miembro de una base ortonormal del espacio nulo izquierdo  $\hat{\mathbf{A}}_i(c_i)$ , donde

$$\hat{\mathbf{A}}_1(z) = \mathbf{A}(z), \quad (2.4.15)$$

$$\hat{\mathbf{A}}_{i+1}(z) = \mathbf{L}_i(z)\hat{\mathbf{A}}_i(z), \quad i = 1, \dots, n_c - 1, \quad (2.4.16)$$

y la matriz  $\mathbf{U}_i$  es tal que  $\begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_i & \mathbf{U}_i \end{bmatrix}$  es unitaria.

**Demostración:**

Ver [12].

□□□

**Observación 2.3 (Interactor unitario derecho de ceros)**

El Lema 2.5 se puede extender a la idea de interactor unitario derecho de ceros generalizado (GRUI), en el sentido que la matriz  $\xi_{\mathbf{A}}(z)$  es un GRUI si y sólo si el producto  $\mathbf{A}(z)\xi_{\mathbf{A}}(z)$  es bipropio, FM, estable, y  $\xi_{\mathbf{A}}(z)$  es unitario y de ganancia a continua identidad. Esta extensión se realiza de manera directa empleando  $\eta_i$  en el Lema 2.5 como miembros de una base ortonormal del espacio nulo derecho de  $\hat{\mathbf{A}}_i(c_i)$  y definiendo los productos apropiadamente [12, 28].

Se debe destacar que el Lema 2.5 no dice nada respecto de la unicidad del GLUI. De hecho, en este tópico está una de las contribuciones de esta tesis y, dado que requiere resultados adicionales, se abordará más adelante en el Capítulo 4.

A fin de clarificar el procedimiento de construcción descrito por el Lema 2.5, a continuación se desarrolla un ejemplo numérico ilustrativo.

**Ejemplo 2.3:** *Considérese la matriz de transferencia*

$$\mathbf{G}(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{z} & \frac{(z-2)}{z^4} \\ \frac{2}{(z-0.5)} & \frac{(z-2)}{z^3} \end{bmatrix}. \quad (2.4.17)$$

Por inspección de la forma de Smith McMillan de  $\mathbf{G}(z)$  se puede establecer que su conjunto de polos es  $\mathcal{P} = \{0.5, 0, 0, 0, 0\}$  y tiene dos ceros finitos en  $z = 2$  y  $z = 2.5$ . Esto implica que  $g_{\text{rel}}\{\mathbf{G}(z)\} = 3$  y, entonces,  $\mathbf{G}(z)$  tiene tres ceros en infinito. El conjunto de ceros de FNM de  $\mathbf{G}(z)$  puede escribirse como  $\mathcal{C} = \{\infty, \infty, \infty, 2.5, 2\}$ . De este modo, siguiendo el procedimiento y la notación descrita en el Lema 2.5 se tiene que:

-  $\hat{\mathbf{G}}_1(z) = \mathbf{G}(z)$  y entonces

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{G}}_1(z) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\eta}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (2.4.18)$$

$$\mathbf{L}_1(z) = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.4.19)$$

-  $\hat{\mathbf{G}}_2(z) = \mathbf{L}_1(z)\hat{\mathbf{G}}_1(z)$  y entonces

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{G}}_2(z) = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad (2.4.20)$$

$$\mathbf{L}_2(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix}. \quad (2.4.21)$$

-  $\hat{\mathbf{G}}_3(z) = \mathbf{L}_2(z)\hat{\mathbf{G}}_2(z)$  y entonces

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{G}}_3(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\eta}_3 = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{bmatrix}^T, \quad (2.4.22)$$

$$\mathbf{L}_3(z) = \begin{bmatrix} 0.8(z + 0.25) & -0.4(z - 1) \\ -0.4(z - 1) & 0.2(z + 4) \end{bmatrix}. \quad (2.4.23)$$

-  $\hat{\mathbf{G}}_4(z) = \mathbf{L}_3(z)\hat{\mathbf{G}}_3(z)$  y entonces

$$\hat{\mathbf{G}}_4(2.5) = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.0224 \\ 2.65 & 0.0848 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\eta}_4 = \begin{bmatrix} -0.967 & 0.255 \end{bmatrix}^T, \quad (2.4.24)$$

$$\mathbf{L}_4(z) = \begin{bmatrix} \frac{-2.2717(z - 0.3397)}{(z - 2.5)} & \frac{0.86423(z - 1)}{(z - 2.5)} \\ \frac{0.86423(z - 1)}{(z - 2.5)} & \frac{0.77171(z - 2.944)}{(z - 2.5)} \end{bmatrix}. \quad (2.4.25)$$

-  $\hat{\mathbf{G}}_5(z) = \mathbf{L}_4(z)\hat{\mathbf{G}}_4(z)$  y entonces

$$\hat{\mathbf{G}}_5(z) = \begin{bmatrix} 0.69 & 0 \\ 2.81 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\eta}_5 = \begin{bmatrix} -0.971 & 0.239 \end{bmatrix}^T, \quad (2.4.26)$$

$$\mathbf{L}_5(z) = \begin{bmatrix} \frac{-1.8285(z - 0.4531)}{(z - 2)} & \frac{0.69652(z - 1)}{(z - 2)} \\ \frac{0.69652(z - 1)}{(z - 2)} & \frac{0.82848(z - 2.207)}{(z - 2)} \end{bmatrix}. \quad (2.4.27)$$

Finalmente, el GLUI resulta

$$\boldsymbol{\xi}_G(z) = \prod_{i=5}^1 \mathbf{L}_i(z) \quad (2.4.28)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{4.1511z(z + 0.4218)(z^2 - 1.126z + 0.38)}{(z - 2)(z - 2.5)} & \frac{-1.3307z(z - 1)(z^2 - 0.6743z + 1.56)}{(z - 2)(z - 2.5)} \\ \frac{-2.0756z(z - 1)(z^2 - 0.4323z + 0.6411)}{(z - 2)(z - 2.5)} & \frac{0.66534z(z + 2.371)(z^2 - 2.963z + 2.632)}{(z - 2)(z - 2.5)} \end{bmatrix}. \quad (2.4.29)$$

■

## 2.5. Lazo de control MIMO

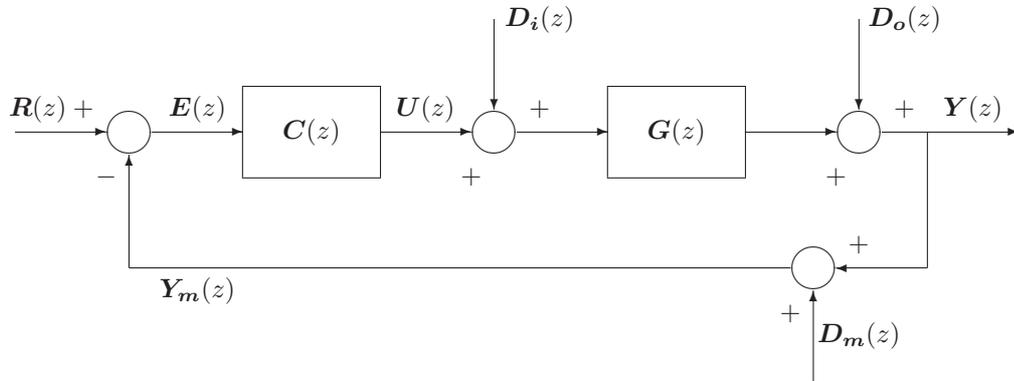
### 2.5.1. Aspectos básicos

El problema básico de control consiste en hallar un modo técnicamente factible de lograr que la salida de un proceso se comporte de un modo deseado y pre-establecido. Este objetivo se puede conseguir mediante la realimentación de las variables sensadas sobre el proceso a un mecanismo de decisión (controlador). De este modo, el controlador debe ser capaz de manipular las entradas a la planta logrando un efecto correctivo sobre las salidas y así conseguir el comportamiento deseado. Una consideración clave es que el control del proceso debe ser efectivo incluso bajo perturbaciones externas que puedan alterar las variables de interés. Una discusión acabada sobre el problema de control y sus interpretaciones puede ser encontrada en [6].

En el contexto de sistemas lineales, el modo estándar de dar solución al problema de control es considerar la arquitectura de la Fig. 2.1. Dicho esquema de realimentación consta de un controlador  $\mathbf{C}(z)$  que, en base a la comparación entre la referencia  $\mathbf{r}(t)$  y la medición

$\mathbf{y}_m(t)$  (llamada señal de error,  $\mathbf{e}(t)$ ), genera la señal de actuación  $\mathbf{u}(t)$  que debe ser aplicada al proceso. El controlador se diseña de modo tal que, en estado estacionario, la señal de error se lleve a cero y por ende se tenga seguimiento perfecto de la referencia por parte de la salida  $\mathbf{y}(t)$ . Nótese que esto debe ocurrir a pesar de la existencia de perturbaciones exógenas,  $\mathbf{d}_i(t)$  y  $\mathbf{d}_o(t)$ , y la inevitable presencia de ruido de medición  $\mathbf{d}_m(t)$  en la variable realimentada.

Además, se debe considerar que el controlador se diseña en base a un modelo nominal del proceso, usualmente denotado por  $\mathbf{G}_o(z)$ , que es una aproximación de la dinámica real del sistema. Esto implica que un buen diseño de control debería también considerar *robustez* ante imperfecciones del modelo  $\mathbf{G}_o(z)$  con respecto al proceso  $\mathbf{G}(z)$ . Respeto a este tópico, un tratamiento conciso e ilustrativo se puede hallar en [15] y una discusión rigurosa y bastante más técnica en [14]. En esta tesis, a excepción del último capítulo, se considerará que el modelo del proceso es perfecto y, en consecuencia, no es necesario realizar ningún tipo de consideración especial respecto a la robustez del lazo. Este enfoque se adopta a fin de concentrar la atención de este trabajo en el problema de forzar restricciones estructurales en el controlador (ver Capítulo 5).



**Figura 2.1.** Lazo de control estándar

En base al diagrama de bloques de la Fig. 2.1, las ecuaciones que rigen la evolución de las señales de interés son [6]:

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{T}_o(z)\mathbf{R}(z) - \mathbf{T}_o(z)\mathbf{D}_m(z) + \mathbf{S}_o(z)\mathbf{D}_o(z) + \mathbf{S}_{io}(z)\mathbf{D}_i(z), \quad (2.5.1)$$

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{S}_o(z)\mathbf{R}(z) + \mathbf{T}_o(z)\mathbf{D}_m(z) - \mathbf{S}_o(z)\mathbf{D}_o(z) - \mathbf{S}_{io}(z)\mathbf{D}_i(z), \quad (2.5.2)$$

$$\mathbf{U}(z) = \mathbf{S}_{uo}(z)(\mathbf{R}(z) - \mathbf{D}_o(z) - \mathbf{D}_m(z)) - \mathbf{S}_{uo}(z)\mathbf{G}_o(z)\mathbf{D}_m(z), \quad (2.5.3)$$

donde  $\mathbf{Y}(z) = \mathcal{Z}\{y(t)\}$ ,  $\mathbf{U}(z) = \mathcal{Z}\{u(t)\}$  y así sucesivamente, y las funciones

$$\mathbf{S}_o(z) = (\mathbf{I} + \mathbf{G}(z)\mathbf{C}(z))^{-1}, \quad (2.5.4)$$

$$\mathbf{T}_o(z) = \mathbf{I} - \mathbf{S}_o(z), \quad (2.5.5)$$

$$\mathbf{S}_{io}(z) = \mathbf{S}_o(z)\mathbf{G}(z), \quad (2.5.6)$$

$$\mathbf{S}_{uo}(z) = \mathbf{G}^{-1}(z)\mathbf{T}_o(z), \quad (2.5.7)$$

corresponden a las *funciones de sensibilidad del lazo*.  $\mathbf{T}_o(z)$  se denomina *sensibilidad complementaria*,  $\mathbf{S}_o(z)$  es la *sensibilidad*,  $\mathbf{S}_{io}(z)$  es la *sensibilidad de entrada* y  $\mathbf{S}_{uo}(z)$  es la *sensibilidad de control*.

### 2.5.2. Requerimientos sobre el lazo

Los requerimientos sobre un lazo pueden ser muchas y de diversa índole. No obstante, éstos se pueden clasificar en tres grupos fundamentales: realizabilidad, estabilidad y desempeño. A continuación se detallan las ideas claves respecto a cada uno.

#### Realizabilidad

Este requisito dice relación con la factibilidad de implementación del controlador. Esto se puede conseguir si y sólo si el controlador puede ser descrito por una matriz de transferencia propia.

#### Estabilidad

La estabilidad de un lazo está garantizada en base al siguiente resultado<sup>4</sup>.

#### Lema 2.6 (Estabilidad de un lazo de control)

*Un lazo de control como el de la Fig. 2.1 es estable si y sólo si las cuatro funciones de sensibilidad  $\mathbf{T}_o(z)$ ,  $\mathbf{S}_o(z)$ ,  $\mathbf{S}_{io}(z)$ ,  $\mathbf{S}_{uo}(z)$  y la matriz de transferencia  $\mathbf{S}_{uo}(z)\mathbf{G}(z)$  son estables.*

#### Demostración:

Ver [6] y su fe de erratas.

□□□

El resultado del Lema 2.6 entrega condiciones para la estabilidad un lazo de control. Esta condición requiere analizar la estabilidad de cinco matrices de transferencia, lo cual en la gran mayoría de los casos puede ser engorroso. Esta dificultad se puede superar por medio del siguiente lema.

<sup>4</sup>Debe notarse que en esta tesis no se hace distinción entre los conceptos de estabilidad y estabilidad interna definidos en [6].

**Lema 2.7 (Estabilidad y condiciones de interpolación)**

Sea  $\mathbf{G}(z) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  en el esquema de control de la Fig. 2.1. Defínase la factorización co-prima derecha (izquierda) en  $\mathcal{RH}_\infty$  de  $\mathbf{G}(z)$  como  $\mathbf{G}(z) = \mathbf{N}_D(z)\mathbf{D}_D^{-1}(z)$  ( $\mathbf{G}(z) = \mathbf{D}_I^{-1}(z)\mathbf{N}_I(z)$ ) y

$$\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \dots, c_{n_c}\}, \quad (2.5.8)$$

$$\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_{n_p}\}, \quad (2.5.9)$$

como el conjunto de ceros de FNM y polos inestables de  $\mathbf{G}(z)$ , respectivamente. Si la multiplicidad algebraica del cero de FNM en  $z = c_i$  (polo inestable en  $z = p_i$ ) se denota por  $\alpha_{c_i}$  ( $\alpha_{p_i}$ ), entonces el lazo de control es estable si y sólo si una de las funciones de sensibilidad es estable y se cumple

$$\boldsymbol{\eta}_{Ii}^H (\boldsymbol{\xi}_{c_i}^j(z)\mathbf{T}_o(z)) \Big|_{z=c_i} = \mathbf{0}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n_c, \forall j = 0, 1, \dots, \alpha_{c_i} - 1 \quad (2.5.10)$$

$$\left( \mathbf{T}_o(z)\boldsymbol{\xi}_{p_i}^j(z) \right) \Big|_{z=p_i} \boldsymbol{\mu}_{Di} = \boldsymbol{\xi}_{p_i}^j(p_i)\boldsymbol{\mu}_{Di}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n_p, \forall j = 0, 1, \dots, \alpha_{p_i} - 1 \quad (2.5.11)$$

donde  $\boldsymbol{\eta}_{Ii}$  es la dirección izquierda asociada al cero FNM en  $z = c_i$ ,  $\boldsymbol{\mu}_{Di}$  es la dirección derecha asociada al polo en  $z = p_i$  y las matrices  $\boldsymbol{\xi}_{c_i}^j(z)$  ( $\boldsymbol{\xi}_{p_i}^j(z)$ ) son tales que factorizan  $j$  ceros de FNM en  $z = c_i$  ( $z = p_i$ ) por la izquierda (derecha) de  $\mathbf{N}_D(z)$  ( $\mathbf{D}_I(z)$ ), es decir la matriz

$$\boldsymbol{\xi}_{c_i}^j(z)\mathbf{N}_D(z), \quad (2.5.12)$$

tiene un cero de FNM en  $z = c_i$  con multiplicidad algebraica  $\alpha_{c_i} - j$  y

$$\mathbf{D}_I(z)\boldsymbol{\xi}_{p_i}^j(z), \quad (2.5.13)$$

tiene un cero de FNM en  $z = p_i$  con multiplicidad algebraica  $\alpha_{p_i} - j$ .

**Demostración:**

Ver [18].

□□□

Las condiciones (2.5.10) y (2.5.11) que debe satisfacer la función de sensibilidad complementaria son conocidas en la literatura como *condiciones de interpolación* y son la extensión al caso MIMO de las conocidas condiciones del control SISO que aseguran que no haya cancelaciones inestables entre planta y controlador [6, 18]. El resultado del Lema 2.7 es muy útil ya que permite analizar la estabilidad de un lazo por la sola inspección de la sensibilidad

complementaria. Nótese que se pueden obtener condiciones de interpolación similares sobre las demás funciones de sensibilidad a partir de (2.5.10),(2.5.11) y las definiciones (2.5.4)-(2.5.7). Esto en definitiva implica que para analizar la estabilidad de un lazo basta con examinar la estabilidad de una función de sensibilidad y sus correspondientes condiciones de interpolación.

A continuación se define un concepto que será empleado en lo sucesivo en este trabajo y comprende los dos requisitos básicos sobre el lazo ya vistos: realizabilidad y estabilidad.

### Definición 2.7 (Lazo admisible)

Se definen los siguientes conceptos:

- (a) *Lazo de control admisible: corresponde a un lazo de control estable y con controlador propio.*
- (b) *Función de sensibilidad admisible: corresponde a alguna de las funciones de sensibilidad asociadas a un lazo admisible.*
- (c) *Controlador admisible: corresponde a un controlador que genera un lazo admisible.*

### Desempeño

Los requisitos de desempeño sobre un lazo de control corresponden en definitiva a los factores condicionan el diseño y síntesis de un determinado controlador. En líneas generales, los requisitos de desempeño más comunes son los que se explican a continuación:

- (a) Seguimiento.

Es deseable que en lazo de control la salida sea lo más similar posible a la señal de referencia. Por inspección de la ecuación (2.5.1), se puede notar que  $\mathbf{T}_o(z)$  es la matriz de transferencia que describe la dinámica entre  $\mathbf{r}(t)$  e  $\mathbf{y}(t)$ . Esto significa que para tener buen seguimiento idealmente se requiere que  $\mathbf{T}_o(e^{j\omega}) = \mathbf{I}$  en la banda de frecuencias en donde la  $\mathbf{r}(t)$  tiene energía significativa.

Es importante recalcar que para efectos de esta tesis, este requerimiento de desempeño es particularmente importante, ya que constituye el tema medular del Capítulo 6, el cual contiene una de las principales contribuciones de este trabajo.

- (b) Compensación de perturbaciones.

A partir de (2.5.1) se puede notar que el efecto de  $\mathbf{d}_i(t)$  y  $\mathbf{d}_o(t)$  en la salida está determinado por la dinámica de  $\mathbf{S}_{io}(z)$  y  $\mathbf{S}_o(z)$ , respectivamente. Luego, para que se tenga una buena compensación de perturbaciones idealmente es necesario que  $|\mathbf{S}_o(e^{j\omega})| = \mathbf{0}$  en la banda de frecuencias donde la energía de las perturbaciones es significativa. Nótese que usando (2.5.5) esta condición es equivalente a requerir que  $|\mathbf{T}_o(e^{j\omega})| = \mathbf{I}$  en la banda de frecuencias de interés.

(c) Inmunidad al ruido de medición.

De acuerdo a (2.5.1) y por argumentos similares a los ya usados, se concluye que para que el ruido tenga un efecto despreciable en la salida del proceso, es necesario que  $|\mathbf{T}_o(e^{j\omega})|$  sea pequeña en la banda de frecuencias donde el ruido es importante.

Los requisitos dados en los puntos (a) y (b) anteriores son ideales. En efecto, considerando que tanto la señal de referencia como las perturbaciones son usualmente de baja frecuencia, dichos requisitos son relajados al nivel de exigir que el ancho de banda de  $\mathbf{T}_o(e^{j\omega})$  sea mayor que el de la señal de referencia y perturbaciones. En forma similar, para el caso del punto (c), como normalmente el ruido de sensor es de alta frecuencia, se requerirá que el ancho de banda de  $\mathbf{T}_o(e^{j\omega})$  sea menor a aquella frecuencia en donde el ruido comienza a ser importante.

Las consideraciones anteriores indican que se hace necesaria una manera de cuantificar de manera precisa la cantidad  $\mathbf{T}_o(e^{j\omega})$ . Esta noción es muy clara en el caso SISO y corresponde a la conocida idea de respuesta en frecuencia [76]. Para el caso de sistemas MIMO la extensión es directa y se hace uso de la noción de *valores singulares*. Una discusión acabada sobre este tópico está fuera del objetivo de esta tesis, por lo que se sugiere al lector interesado consultar las referencias [6, 7, 14, 15].

Existen requisitos de desempeño adicionales a los mencionados. Entre ellos destacan: velocidad de transiente [6], limitaciones fundamentales [6, 18] y consideraciones de robustez del diseño [7, 14, 15].

## 2.6. Estructuras de control MIMO

La idea de estructura de control en un lazo MIMO puede ser entendida de diferentes maneras, por lo que se hace necesario definir con claridad qué se entiende por dicho término en esta tesis.

En la literatura técnica existente a la fecha, la idea de estructura de controladores o de *controladores con estructura restringida* se puede entender como restricciones en términos de complejidad [77–80], patrones de comunicación [81–83] o las denominadas restricciones tipo ralas (*sparse*) [28, 34, 48–62, 84, 85].

En esta tesis el problema de restricción estructural en el controlador se enfoca como restricción de tipo rala, por lo que **en adelante el término *estructura* se entenderá únicamente como *estructura rala***. A continuación se entrega la definición formal de este concepto.

### Definición 2.8 (Restricciones de estructura)

Un matriz de transferencia  $\mathbf{A}(z) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  se dirá de estructura restringida si y sólo si algunos de sus elementos están restringidos a ser idénticamente nulos, esto es,  $A_{ij}(z) \equiv 0$  para algunos pares específicos  $(i, j)$ . El conjunto de todas las matrices con una estructura

restringida dada será denominado conjunto de restricción estructural (CRE). Además, si  $\mathcal{S}$  es un CRE, entonces para referirnos a la restricción estructural de los elementos en  $\mathcal{S}$  usaremos el término estructura de  $\mathcal{S}$ .

Tres CRE comunes en el diseño y análisis de sistemas de control son la estructura *diagonal por bloques*, *rala simple* y *triangular*, definidas respectivamente por

$$\mathcal{S}_d = \left\{ \mathbf{X}(z) \in \mathbb{C}^{n \times n} : \mathbf{X}(z) = \text{diag}\{\mathbf{X}_i(z)\}_{i=1, \dots, n_b}, \mathbf{X}_i(z) \in \mathbb{C}^{n_i \times n_i}, \sum_{i=1}^{n_b} n_i = n \right\}, \quad (2.6.1)$$

$$\mathcal{S}_1 = \{ \mathbf{X}(z) \in \mathbb{C}^{n \times n} : \mathbf{X}(z) = [\mathbf{X}(z)]_d + X_{k\ell}(z) \mathbf{1}_{k\ell}, k \neq \ell, 1 \leq k \leq n, 1 \leq \ell \leq n \}, \quad (2.6.2)$$

$$\mathcal{S}_t = \{ \mathbf{X}(z) \in \mathbb{C}^{n \times n} : X_{ij}(z) \equiv 0 \forall j > i, j \leq n, 1 \leq i \leq n \}, \quad (2.6.3)$$

, donde la matriz  $\mathbf{1}_{k\ell}$  tiene todos sus elementos nulos, salvo el elemento  $(k, \ell)$ , en el cual tiene un uno. Tal y como se desarrollará en profundidad en el Capítulo 5, es importante destacar que estos CRE son comunes no sólo como estructuras de control, sino que también aparecen en forma natural en plantas que son inherentemente estructuradas [61]. Además, merece la pena mencionar en este punto que los esfuerzos de investigación hacia el control con estructura restringida han estado abocados principalmente al control descentralizado, es decir, al CRE  $\mathcal{S}_d$  con  $n_i = 1, \forall i = 1, 2, \dots, n_b$  [48–60].

La estructura que posee un determinado controlador tiene directa relación con qué mediciones se emplean para generar cada señal de actuación. A modo de ejemplo, un lazo para una planta  $2 \times 2$  con controlador triangular puede ser representado esquemáticamente por el diagrama de bloques de la Fig. 2.2. En ella se puede notar que la señal de actuación  $u_1(t)$  es generada sólo con información de la salida  $y_1(t)$ , mientras que la generación  $u_2(t)$  incorpora información relativa a ambos canales de salida ( $y_1(t)$  e  $y_2(t)$ ).

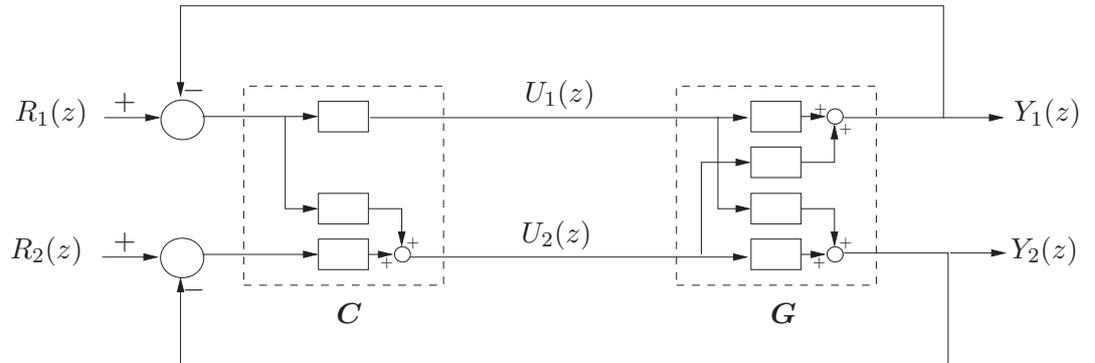


Figura 2.2. Diagrama de bloques de un lazo MIMO con controlador triangular.

## 2.7. Conclusiones

En este capítulo se han definido los elementos y conceptos claves relativos a sistemas lineales que serán usados a lo largo de este trabajo de tesis. Para el caso de sistemas MIMO, los rasgos dinámicos importantes (polos, ceros y retardos) tienen asociado un vector de dirección, hecho que es distintivo de este tipo de sistemas y ciertamente complica su estudio y análisis.

Los resultados originales de esta tesis descansan básicamente en dos herramientas fundamentales: las factorizaciones de ceros de una matriz de transferencia y la descomposición ortogonal del espacio  $\mathcal{RL}_2$ . Para la primera, en base a resultados previos se presenta un algoritmo explícito para la construcción del denominado interactor unitario de ceros generalizado (GLUI). Por otro lado, una matriz de transferencia puede ser asociada a un elemento del espacio de funciones  $\mathcal{RL}_2$ . Como este espacio es Hilbert, entonces toda matriz de transferencia admite una descomposición ortogonal en  $\mathcal{RL}_2$ .

Los aspectos básicos de un lazo de control MIMO realimentado se exponen de manera concisa. Un elemento clave en este tema son las condiciones que garantizan tanto la estabilidad y realizabilidad del lazo como el cumplimiento de requerimientos típicos en desempeño. Finalmente, se introduce la idea de control con estructura restringida y se definen aquellas estructuras que serán de interés en este trabajo de tesis.

# PARAMETRIZACIÓN DE CONTROLADORES

### 3.1. Introducción

Este capítulo trata sobre parametrizaciones útiles para describir lazos de control admisibles. Este tipo de caracterizaciones son empleadas tanto para el diseño [6–9] como para la obtención de propiedades de un lazo de control [10–13] que involucren la resolución de problemas de optimización.

La conocida parametrización de Youla [4–6, 14, 70] provee una caracterización muy útil de los controladores admisibles para una determinada planta. La principal ventaja de esta formulación es que entrega expresiones para las funciones de sensibilidad del lazo que son afines en un parámetro, lo cual es especialmente ventajoso para resolver problemas de optimización cuadráticos que involucren a dichas funciones [6, 8]. La caracterización que entrega la parametrización de Youla es muy simple de manipular si la planta es estable. Para el caso inestable, por el contrario, la situación se complica debido a que la formulación requiere el conocimiento *a priori* de un controlador admisible y las expresiones para las funciones de sensibilidad se vuelven poco manejables.

En este capítulo se plantea una versión alternativa de la parametrización de Youla basada en los resultados de [17]. Esta formulación es afín y permite expresar las funciones de sensibilidad de una manera conveniente incluso para el caso en que la planta es inestable. La utilidad de esta parametrización ha sido validada con la aparición de resultados interesantes relativos a límites de desempeño que descansan fuertemente en su uso [13].

En el caso inestable, el hecho de conocer un controlador admisible en forma previa es reemplazado por la necesidad de disponer *a priori* de una función de sensibilidad admisible. En este tópico se enmarca la principal contribución de este capítulo, a saber: se entrega la forma explícita de una función de sensibilidad admisible para una clase amplia de sistemas lineales MIMO. Esta sensibilidad admisible se define gracias a la idea de *esencialidad* y puede ser obtenida por simple inspección de ciertos rasgos dinámicos sin necesidad de recurrir a

ningún procedimiento de diseño. Esta característica la convierte en una elección inmediata para ser empleada como sensibilidad admisible en la parametrización alternativa de Youla. Los resultados de este capítulo están basados en [1].

### 3.2. Parametrización clásica

Esta sección describe la parametrización de Youla de todos los controladores admisibles. La exposición está basada en [6], pero el desarrollo original se encuentra reportado en [4, 5]. La versión en variables de estado de este importante resultado se encuentra tratada de manera rigurosa en [14].

El siguiente lema entrega la caracterización general de todos los controladores propios que estabilizan a una planta en un lazo como el de la Fig. 2.1.

#### Lema 3.1 (Parametrización clásica de Youla)

Sea  $G(z) \in \mathcal{RL}_2$  propia y no singular c. e. t. p. con factorizaciones coprimas en  $\mathcal{RH}_\infty$  derecha e izquierda dadas respectivamente por

$$G(z) = N_D(z)D_D^{-1}(z), \quad (3.2.1)$$

$$= D_I^{-1}(z)N_I(z). \quad (3.2.2)$$

Sea además  $C_s(z)$  un controlador admisible para  $G(z)$  con factorizaciones coprimas en  $\mathcal{RH}_\infty$  izquierda y derecha dadas por

$$C_s(z) = C_{ND}(z)C_{DD}^{-1}(z), \quad (3.2.3)$$

$$= C_{DI}^{-1}(z)C_{NI}(z). \quad (3.2.4)$$

Entonces:

(a) Todos los controladores admisibles se pueden escribir como

$$C(z) = (C_{ND}(z) + D_D(z)Q(z))(C_{DD}(z) - N_D(z)Q(z))^{-1}, \quad (3.2.5)$$

$$= (C_{DI}(z) - Q(z)N_I(z))^{-1}(C_{NI}(z) + Q(z)D_I(z)), \quad (3.2.6)$$

donde  $Q(z) \in \mathcal{RH}_\infty$  y se denomina parámetro de Youla.

(b) Las funciones de sensibilidad admisibles asociadas son afines en  $Q(z)$  y pueden ser expresadas como

$$S_o(z) = (C_{DD}(z) - N_D(z)Q(z))D_I(z). \quad (3.2.7)$$

**Demostración:**

La demostración de este resultado puede encontrarse en [6]

□□□

Si la planta es estable, la complejidad de la parametrización clásica dada en el Lema 3.1 se reduce considerablemente [6]. En efecto, si  $\mathbf{G}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$  entonces de acuerdo al Lema 2.4, la factorización coprima en  $\mathcal{RH}_\infty$  para  $\mathbf{G}(z)$  es

$$\mathbf{D}_I(z) = \mathbf{D}_D(z) = \mathbf{I}, \quad (3.2.8)$$

$$\mathbf{N}_I(z) = \mathbf{N}_D(z) = \mathbf{G}(z). \quad (3.2.9)$$

Además, si la planta es estable, siempre se puede elegir  $\mathbf{C}_s(z) = \mathbf{0}$  como controlador admisible y entonces una factorización coprima en  $\mathcal{RH}_\infty$  para el controlador es

$$\mathbf{C}_{DI}(z) = \mathbf{C}_{DD}(z) = \mathbf{I}, \quad (3.2.10)$$

$$\mathbf{C}_{NI}(z) = \mathbf{C}_{ND}(z) = \mathbf{0}. \quad (3.2.11)$$

Reemplazando (3.2.8)-(3.2.11) en (3.2.5) y (3.2.6) del Lema 3.1 resulta que todos los controladores admisibles pueden ser escritos como

$$\mathbf{C}(z) = \mathbf{Q}(z) (\mathbf{I} - \mathbf{G}(z)\mathbf{Q}(z))^{-1} \quad (3.2.12)$$

$$= (\mathbf{I} - \mathbf{Q}(z)\mathbf{G}(z))^{-1} \mathbf{Q}(z), \quad (3.2.13)$$

con  $\mathbf{Q}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$ . Del mismo modo, usando (3.2.7) todas las funciones de sensibilidad admisibles se pueden parametrizar como

$$\mathbf{S}_o(z) = \mathbf{I} - \mathbf{G}(z)\mathbf{Q}(z). \quad (3.2.14)$$

La expresión (3.2.14) para la función de sensibilidad del lazo es muy compacta y será empleada extensivamente en los Capítulos 5 y 6 para derivar resultados fundamentales de este trabajo.

No obstante lo anterior, existen dos aspectos que motivan la búsqueda de una forma más simple de parametrizar la función de sensibilidad de un lazo admisible, a saber:

- (a) Como se ha visto en el desarrollo previo, la parametrización de todas las funciones de sensibilidad del lazo es simple sólo en el caso en que la planta es estable, ya que de lo contrario se debe recurrir a (3.2.7). En dicha expresión, si la planta es de orden  $p$ , en general el producto  $\mathbf{C}_{DD}(z)\mathbf{D}_I(z)$  es de orden  $2p$  [6], lo cual agrega una dificultad no menor a las manipulaciones necesarias para resolver ciertos problemas de optimización.
- (b) Si la planta es inestable, entonces la parametrización del Lema 3.1 requiere de la disponi-

bilidad de algún controlador admisible para  $\mathbf{G}(z)$ . Para ciertas plantas, este diseño *inicial* puede ser complicado por sí mismo y, por ende, se pierde la ventaja de disponer de una parametrización de todos los controladores admisibles.

En la sección siguiente se da solución al punto (a) recién mencionado mediante la formulación de la denominada parametrización alternativa de Youla. Por otra parte, el punto (b) es atacado en la sección subsiguiente mediante el cómputo explícito de la denominada *función de sensibilidad complementaria esencial*.

### 3.3. Parametrización alternativa

La parametrización alternativa de Youla [17] se presenta en el siguiente lema.

#### Lema 3.2 (Parametrización alternativa de Youla)

Sea  $\mathbf{G}(z) \in \mathcal{RL}_2$  propia, no singular c. e. t. p., sin ceros sobre la circunferencia unitaria y con factorizaciones coprimas en  $\mathcal{RH}_\infty$  derecha e izquierda dadas respectivamente por

$$\mathbf{G}(z) = \mathbf{N}_D(z)\mathbf{D}_D^{-1}(z), \quad (3.3.1)$$

$$= \mathbf{D}_I^{-1}(z)\mathbf{N}_I(z). \quad (3.3.2)$$

Si  $\mathbf{S}_{oo}(z)$  una función de sensibilidad admisible para  $\mathbf{G}(z)$ , entonces:

(a)  $\mathbf{S}_o(z)$  es una función de sensibilidad admisible si y sólo si puede ser escrita como

$$\mathbf{S}_o(z) = \mathbf{S}_{oo}(z) - \xi_c^{-1}(z)\mathbf{X}(z)\xi_p^{-1}(z), \quad (3.3.3)$$

donde  $\xi_c(z)$  es el GLUI de  $\mathbf{N}_D(z)$ ,  $\xi_p(z)$  es el GRUI de  $\mathbf{D}_I(z)$  y  $\mathbf{X}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$ .

Similarmente,  $\mathbf{T}_o(z)$  es una función de sensibilidad complementaria admisible si y sólo si puede ser escrita como

$$\mathbf{T}_o(z) = \mathbf{T}_{oo}(z) + \xi_c^{-1}(z)\mathbf{X}(z)\xi_p^{-1}(z), \quad (3.3.4)$$

donde  $\mathbf{T}_{oo}(z) = \mathbf{I} - \mathbf{S}_{oo}(z)$ .

(b) Todos los controladores admisibles para  $\mathbf{G}(z)$  pueden expresados como

$$\mathbf{C}(z) = \mathbf{G}^{-1}(z) \left( (\mathbf{S}_{oo}(z) - \xi_c^{-1}(z)\mathbf{X}(z)\xi_p^{-1}(z))^{-1} - \mathbf{I} \right). \quad (3.3.5)$$

(c) Un lazo con función de sensibilidad dada por (3.3.3) provee seguimiento perfecto de referencias constantes si y sólo si existe  $\tilde{\mathbf{X}}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$  tal que

$$\mathbf{X}(1) = \mathbf{S}_{oo}(z) \Leftrightarrow \mathbf{X}(z) = \frac{z-1}{z} \tilde{\mathbf{X}}(z) + \mathbf{S}_{oo}(1). \quad (3.3.6)$$

**Demostración**

- (a) De acuerdo al Lema 2.6, un lazo como el de la Fig. 2.1 es estable si y sólo si las matrices de transferencia  $\mathbf{S}_o(z)$ ,  $\mathbf{T}_o(z)$ ,  $\mathbf{S}_{io}(z) = \mathbf{S}_o(z)\mathbf{G}(z)$ ,  $\mathbf{S}_{uo}(z) = \mathbf{G}^{-1}(z)\mathbf{T}_o(z)$  y  $\mathbf{S}_{uo}(z)\mathbf{G}(z)$  son estables. Usando (3.3.3) y luego de algunas manipulaciones algebraicas resulta

$$\mathbf{S}_{uo}(z) = \mathbf{G}^{-1}(z)\mathbf{T}_{oo}(z) + (\boldsymbol{\xi}_c(z)\mathbf{G}(z))^{-1}\mathbf{X}(z)\boldsymbol{\xi}_p^{-1}(z), \quad (3.3.7)$$

$$\mathbf{S}_{io}(z) = \mathbf{S}_{oo}(z)\mathbf{G}(z) - \boldsymbol{\xi}_c^{-1}(z)\mathbf{X}(z)(\mathbf{D}_I(z)\boldsymbol{\xi}_p(z))^{-1}\mathbf{N}_I(z), \quad (3.3.8)$$

$$\mathbf{S}_{uo}(z)\mathbf{G}(z) = \mathbf{G}^{-1}(z)\mathbf{T}_{oo}(z)\mathbf{G}(z) + (\boldsymbol{\xi}_c(z)\mathbf{G}(z))^{-1}\mathbf{X}(z)(\mathbf{D}_I(z)\boldsymbol{\xi}_p(z))^{-1}\mathbf{N}_I(z). \quad (3.3.9)$$

Las definiciones de  $\boldsymbol{\xi}_c(z)$  y  $\boldsymbol{\xi}_p(z)$  implican que las matrices  $(\boldsymbol{\xi}_c(z)\mathbf{G}(z))^{-1}$  y  $(\mathbf{D}_I(z)\boldsymbol{\xi}_p(z))^{-1}$  son ambas estables. Esto, junto con el hecho que  $\mathbf{S}_{oo}(z)$  y  $\mathbf{T}_{oo}(z)$  son admisibles, y  $\mathbf{X}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$ , implican que las cinco matrices de transferencia en cuestión son estables.

Por otro lado, se puede notar que  $g_{rel}\{\mathbf{T}_o(z)\} \geq g_{rel}\{\mathbf{G}(z)\}$  y que como  $\mathbf{G}(z)$  es propia entonces se cumple  $\lim_{z \rightarrow \infty} \mathbf{S}_o(z) = \mathbf{I}$ . Luego, de acuerdo a [6] el controlador que genera a  $\mathbf{S}_o(z)$  es propio y entonces  $\mathbf{S}_o(z)$  es admisible (ver [17] para una versión acabada de la demostración).

- (b) Por definición  $\mathbf{S}_o(z) = (\mathbf{I} + \mathbf{G}(z)\mathbf{C}(z))^{-1}$ , luego con el uso de (3.3.3) se despeja  $\mathbf{C}(z)$  en forma directa y el resultado procede.
- (c) De acuerdo a lo visto en la Sección (2.5) y lo expuesto en [6], un lazo tiene seguimiento perfecto de referencias constantes si y sólo si  $\mathbf{S}_o(1) = \mathbf{0}$ . Tanto  $\boldsymbol{\xi}_c(z)$  como  $\boldsymbol{\xi}_p(z)$  tienen ganancia a continua identidad, por lo que esto se consigue si  $\mathbf{X}(1) = \mathbf{S}_{oo}(1)$  con  $\mathbf{X}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$ . Por inspección del lado derecho de (3.3.6) se puede ver que  $\mathbf{X}(z) \in \mathcal{RH}_\infty \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{X}}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$ , con lo cual se obtiene el resultado (3.3.6).

□□□

La parametrización alternativa de Youla provee una manera compacta de expresar la función de sensibilidad de un lazo admisible en términos de un parámetro libre  $\mathbf{X}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$ . Respecto a este resultado, a continuación se exponen algunos comentarios pertinentes.

- (a) La parametrización alternativa provee, en general, expresiones más simples (menor orden) que la versión clásica dada en el Lema 3.1. Además, posee la ventaja de incluir explícitamente los factores  $\boldsymbol{\xi}_c(z)$  y  $\boldsymbol{\xi}_p(z)$ , que contienen la estructura de ceros de FNM y polos inestables de la planta. Esto enfatiza el hecho que  $\mathbf{T}_o(z)$  y  $\mathbf{S}_o(z)$  deben satisfacer las condiciones de interpolación del Lema 2.7, es decir, si el lazo es admisible, entonces  $\mathbf{T}_o(z)$  debe tener como ceros a todos los ceros de FNM de  $\mathbf{G}(z)$  y  $\mathbf{S}_o(z)$  debe tener

como ceros a todos los polos inestables de  $\mathbf{G}(z)$  (en ambos casos con las direcciones apropiadas). Mas información respecto a este punto se puede encontrar en [6].

- (b) Al igual que en la versión clásica, la parametrización alternativa es particularmente simple si la planta es estable. En efecto, si  $\mathbf{G}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$ , entonces siempre se puede escoger  $\mathbf{S}_{oo}(z) = \mathbf{I}$  o  $\mathbf{T}_{oo}(z) = \mathbf{0}$  y las expresiones se simplifican considerablemente.
- (c) La formulación de la parametrización del Lema 3.2 descansa fuertemente en la construcción de interactores de ceros. En esta tesis se ha planteado esta parametrización en términos de interactores unitarios (GLUI o GRUI), no obstante, esto no es requisito para que la parametrización esté bien definida (ver [17]). Se ha preferido este enfoque básicamente por dos motivos: (a) los interactores unitarios proveen ventajas analíticas considerables y, (b) los algoritmos para la construcción de otros tipos de interactores [19] son considerablemente más engorrosos que el del Lema 2.5 en la pág. 22.
- (d) A diferencia de la parametrización clásica, esta versión se enfoca en parametrizar directamente la función de sensibilidad admisible. Luego, para el caso en que  $\mathbf{G}(z)$  es inestable, el problema de disponer *a priori* de un controlador admisible  $\mathbf{C}_s(z)$  en la parametrización clásica, se traduce ahora en disponer previamente de una función de sensibilidad admisible  $\mathbf{S}_{oo}(z)$  o  $\mathbf{T}_{oo}(z)$ . Esto implica que la formulación alternativa de la parametrización no soluciona el problema de tener que realizar previamente un diseño, sino que sólo traslada el origen de éste.

El último comentario expuesto es de especial importancia para nuestros propósitos. En efecto, como se mostrará en la sección siguiente, la inclusión de las condiciones para que el lazo sea admisible es mucho más simple de realizar sobre una función de sensibilidad que sobre un controlador. El concepto de esencialidad se aprovechará para obtener una forma general para una función de sensibilidad admisible.

### 3.4. Función de sensibilidad esencial

#### 3.4.1. Motivación e idea de esencialidad

En base al análisis de la sección anterior resulta natural plantear la interrogante: si para parametrizar cualquier sensibilidad admisible requerimos de alguna previamente conocida, entonces *¿cuál es la función de sensibilidad que posee los rasgos mínimos necesarios para garantizar un lazo estable y con controlador propio?* La respuesta a esta pregunta pasa inevitablemente por identificar qué rasgos mínimos debe tener la función de sensibilidad buscada. La siguiente definición comprende esta idea y constituye la base para el desarrollo posterior.

**Definición 3.1 (Función de sensibilidad esencial)** Una función de sensibilidad  $F(z)$  se dice esencial si satisface:

- (a)  $F(z)$  es admisible.
- (b)  $F(z)$  puede ser elegida en base a ciertos rasgos de la planta y sin utilizar ningún procedimiento de diseño.

A partir de esta definición, es claro que para una planta dada debe existir una función de sensibilidad esencial correspondiente que captura las características estrictamente necesarias para asegurar su admisibilidad. Sin embargo, hay que recalcar que la definición entregada es bastante general y que dicha sensibilidad esencial no es única (esto dependerá básicamente del modo en como ésta se construya). Además, la idea de esencialidad puede aplicarse a cualquiera de las funciones de sensibilidad definidas en (2.5.4)-(2.5.7), lo cual relaja aún más la definición.

El resultado principal de este capítulo es una forma explícita para la función de sensibilidad complementaria esencial asociada a un sistema MIMO. Por motivos de claridad y dado que en el caso MIMO los aspectos técnicos pueden oscurecer la naturaleza de los resultados, en primer lugar se expone el caso escalar.

### 3.4.2. Caso SISO

**Lema 3.3 (Sensibilidad complementaria esencial, caso SISO)**

Sea  $G(z) \in \mathcal{RL}_2$  propia sin ceros en  $|z| = 1$ . Denótese el conjunto de  $n_{pu}$  polos inestables de  $G(z)$  como  $\{p_1, p_2, \dots, p_{n_{pu}}\}$  y tales que  $p_i \neq p_j, \forall i \neq j$ , es decir,  $G(z)$  no tiene polos inestables repetidos. Entonces  $G(z)$  tiene una función de sensibilidad complementaria esencial dada por

$$T_{oe}(z) = \xi_c^{-1}(z) \left\{ \xi_c(p_1) + \sum_{i=2}^{n_{pu}} B_i(z) (\xi_c(p_i) - \xi_c(p_1)) \right\}, \quad (3.4.1)$$

donde  $\xi_c(z)$  es un GLUI de  $G(z)$  y  $B_i(z)$  se define como

$$B_i(z) = \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq i}}^{n_{pu}} \left( \frac{z - p_\ell}{1 - z\bar{p}_\ell} \right) \left( \frac{1 - p_i\bar{p}_\ell}{p_i - p_\ell} \right). \quad (3.4.2)$$

**Demostración:**

La demostración procede por partes. En primer lugar, de acuerdo al Lema 2.7 la estabilidad del lazo está garantizada si y sólo si  $T_{oe}(z)$  es estable y se satisfacen las condiciones de interpolación. A partir de la definición de GLUI en la pág. 21 se tiene que  $\xi_c^{-1}(z)$  es estable.

Esto, junto con la estabilidad de  $B_i(z)$ , implica que  $T_{oe}(z)$  es estable. El factor  $B_i(z)$  cumple

$$B_i(p_j) = \delta(i - j), \quad (3.4.3)$$

donde  $\delta(t)$  denota al delta de Kronecker [6]. Luego, si  $p_j$  es el  $j$ -ésimo polo inestable de  $G(z)$  resulta

$$T_{oe}(p_j) = \xi_c^{-1}(p_j) \left\{ \xi_c(p_1) + \sum_{i=2}^{n_{pu}} B_i(p_j) (\xi_c(p_i) - \xi_c(p_1)) \right\} \quad (3.4.4)$$

$$= \xi_c^{-1}(p_j) \{ \xi_c(p_1) + (\xi_c(p_j) - \xi_c(p_1)) \} \quad (3.4.5)$$

$$= 1, \quad (3.4.6)$$

con lo cual se cumple la condición de interpolación de polos (2.5.11). La condición de interpolación de ceros se cumple en forma trivial ya que como  $B_i(z)$  es estable y propio, y  $\xi_c^{-1}(z)$  tiene los mismos ceros de FNM que  $G(z)$ , entonces todo cero de FNM de  $G(z)$  también es cero de  $T_{oe}(z)$ .

Por otro lado, la realizabilidad del lazo resultante está garantizada ya que  $g_{rel} \{ \xi_c^{-1}(z) \} = g_{rel} \{ G(z) \}$ , lo cual implica que  $g_{rel} \{ T_{oe}(z) \} = g_{rel} \{ G(z) \}$  y por ende el controlador asociado es bipropio [6].

□□□

El resultado recién expuesto permite asociar a cada planta  $G(z)$  una función de sensibilidad complementaria admisible que puede ser elegida sin necesidad de recurrir a un procedimiento de diseño. Un hecho importante es que la función de sensibilidad  $T_{oe}(z)$  dada en el Lema 3.3 no es única ya que depende del ordenamiento dado al conjunto de polos inestables de  $G(z)$ . En particular, de acuerdo a (3.4.1),  $T_{oe}(z)$  depende fuertemente de el polo que sea designado como  $p_1$ . A continuación se presenta un corolario interesante que se deriva del Lema 3.3.

### Corolario 3.1 (Propiedad de la sensibilidad complementaria esencial SISO)

*La función de sensibilidad complementaria esencial dada en el Lema 3.3 es generada por un controlador de mínimo orden que cancela todo polo estable y cero de FNM de  $G(z)$ .*

#### Demostración:

Sea  $n_{ps}$ ,  $n_{cu}$  y  $n_{cs}$  el número de polos estables, ceros de FNM finitos y ceros de FM de  $G(z)$ , respectivamente. Sea además  $T_o(z)$  la función de sensibilidad complementaria generada por un controlador que cancela todos los polos estables y ceros FM de  $G(z)$ . De acuerdo a [6], para poder asignar los polos del lazo cerrado de manera arbitraria, el mínimo orden para polinomio característico del lazo es  $2(n_{ps} + n_{pu}) - 1$ . Luego, considerando las cancelaciones

existentes entre planta y controlador, el orden de  $T_o(z)$  resulta

$$gr \{den \{T_o(z)\}\} = 2(n_{ps} + n_{pu}) - 1 - n_{ps} - n_{cs} \quad (3.4.7)$$

$$= 2n_{pu} + n_{ps} - n_{cs} - 1 \quad (3.4.8)$$

Por otra parte, el orden de la función de sensibilidad esencial dada en el Lema 3.3 es

$$gr \{den \{T_{oe}(z)\}\} = g_{rel} \{G(z)\} + n_{cu} + n_{pu} - 1 \quad (3.4.9)$$

$$= 2n_{pu} + n_{ps} - n_{cs} - 1 \quad (3.4.10)$$

$$\Rightarrow gr \{den \{T_{oe}(z)\}\} = gr \{den \{T_o(z)\}\} \quad (3.4.11)$$

Esto implica que los  $n_{ps} + n_{cs}$  polos de lazo cerrado faltantes en  $T_{oe}(z)$  pertenecen al conjunto de polos y ceros cancelados de  $G(z)$  y, como  $T_{oe}(z)$  es admisible, son iguales al conjunto de polos estables y ceros de FNM de  $G(z)$ .

□□□

Para ilustrar las ideas presentadas hasta este punto, se presenta un ejemplo donde se computa en forma explícita la función de sensibilidad complementaria esencial para un sistema SISO.

**Ejemplo 3.1:** *Considérese un sistema SISO descrito por su función de transferencia*

$$G(z) = \frac{(z - 0.6)(z - 3)}{(z - 1.5)(z - 2)(z - 0.8)}. \quad (3.4.12)$$

Además de un cero en infinito,  $G(z)$  tiene un cero de FNM en  $z = 3$  y dos polos inestables en  $p_1 = 1.5$  y  $p_2 = 2$  (nótese que esta asignación es arbitraria). El GLUI de  $G(z)$  es

$$\xi_c(z) = \frac{z(1 - 3z)}{z - 3}. \quad (3.4.13)$$

El factor  $B_2(z)$  se puede calcular directamente de (3.4.2) como

$$B_2 = -\frac{4(z - 1.5)}{1 - 1.5z}. \quad (3.4.14)$$

De acuerdo a (3.4.1) la función de sensibilidad complementaria esencial resulta entonces

$$T_{oe1}(z) = -\frac{6.94(z - 1.36)(z - 3)}{z(z - 1/3)(z - 2/3)}. \quad (3.4.15)$$

Por otro lado, usando (3.4.1) con la asignación  $p_1 = 2$  y  $p_2 = 1.5$  se obtiene otra función

de sensibilidad complementaria esencial

$$T_{oe2}(z) = -\frac{7.67(z - 1.35)(z - 3)}{z(z - 1/3)(z - 0.5)}. \quad (3.4.16)$$

Se puede verificar que  $g_{rel} \{T_{oe1}(z)\} = g_{rel} \{T_{oe2}(z)\} = g_{rel} \{G(z)\}$ ,  $T_{oe1}(1.5) = T_{oe1}(2) = 1$ ,  $T_{oe2}(1.5) = T_{oe2}(2) = 1$  y ambas tienen un cero en  $z = 3$ , por lo cual son admisibles. Además, la cancelación del polo estable y el cero de FM por parte del controlador se verifica ya que  $T_{oe1}(0,6) \neq 0$ ,  $T_{oe1}(0,8) \neq 1$ ,  $T_{oe2}(0,6) \neq 0$  y  $T_{oe2}(0,8) \neq 1$ . ■

### 3.4.3. Caso MIMO

#### Lema 3.4 (Sensibilidad complementaria esencial, caso MIMO)

Sea  $\mathbf{G}(z) \in \mathcal{RL}_2$  propia, no singular c. e. t.  $p$  y sin ceros en  $|z| = 1$ . Denótese el conjunto de  $n_{cu}$  ceros de FNM (contando multiplicidades) de  $\mathbf{G}(z)$  como  $\{c_1, c_2, \dots, c_{n_{cu}}\}$  y el de  $n_{pu}$  polos inestables (contando multiplicidades) de  $\mathbf{G}(z)$  como  $\{p_1, p_2, \dots, p_{n_{pu}}\}$ , con direcciones derechas definidas como  $\{\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2, \dots, \boldsymbol{\mu}_{n_{pu}}\}$ . Supóngase que  $c_i \neq p_j, \forall i, \forall j$  y que  $p_i \neq p_j, \forall i \neq j$ . Si se define  $\Gamma_i(\mathbf{M})$  como

$$\Gamma_i(\mathbf{M}) = \mathbf{M}\boldsymbol{\mu}_i\boldsymbol{\mu}_i^H + \mathbf{U}_i\mathbf{U}_i^H, \quad (3.4.17)$$

donde  $\mathbf{U}_i$  es tal que la matriz  $\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_i & \mathbf{U}_i \end{bmatrix}$  es unitaria, entonces  $\mathbf{G}(z)$  tiene una función de sensibilidad complementaria esencial dada por

$$\mathbf{T}_{oe}(z) = \boldsymbol{\xi}_c^{-1}(z) \left\{ \Gamma_1(\boldsymbol{\xi}_c(p_1)) + \sum_{i=2}^{n_{pu}} B_i(z)\Gamma_i(\mathbf{X}_i) \right\}, \quad (3.4.18)$$

donde  $\boldsymbol{\xi}_c(z)$  es el GLUI de  $\mathbf{G}(z)$  (es decir, GLUI de  $\mathbf{N}_D(z)$ , con  $\mathbf{G}(z) = \mathbf{N}_D(z)\mathbf{D}_D^{-1}(z)$  una factorización coprima en  $\mathcal{RH}_\infty$  para  $\mathbf{G}(z)$ ),

$$\mathbf{X}_i = \boldsymbol{\xi}_c(p_i) - \Gamma_1(\boldsymbol{\xi}_c(p_1)), \quad (3.4.19)$$

y el escalar  $B_i(z)$  se define como

$$B_i(z) = \prod_{\substack{\ell=1 \\ p_i \neq p_\ell \\ \ell \neq i}}^{n_{pu}} \left( \frac{z - p_\ell}{1 - z\bar{p}_\ell} \right) \left( \frac{1 - p_i\bar{p}_\ell}{p_i - p_\ell} \right). \quad (3.4.20)$$

**Demostración:**

La demostración procede, *mutatis mutandis*, como en el caso SISO. La estabilidad de  $\mathbf{T}_{oe}(z)$  y la realizabilidad del lazo están garantizadas por lo mismos argumentos empleados en el caso escalar, no obstante, el cumplimiento de condiciones de interpolación merecen un tratamiento más detallado. Por las suposiciones del enunciado se tiene que  $p_i \neq p_j, \forall i \neq j$ . De acuerdo al Lema 2.7 en la pág. 28 esto implica que la condición de interpolación de polos se reduce a verificar que

$$\mathbf{T}_{oe}(p_j)\boldsymbol{\mu}_j = \boldsymbol{\mu}_j, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n_{pu}. \quad (3.4.21)$$

De este modo, sea  $p_j$  el  $j$ -ésimo polo inestable de  $\mathbf{G}(z)$ , entonces con la propiedad en (3.4.3) de  $B_i(z)$  y notando que  $\boldsymbol{\Gamma}_i(\mathbf{M})$  satisface

$$\boldsymbol{\Gamma}_i(\mathbf{M})\boldsymbol{\mu}_i = \mathbf{M}\boldsymbol{\mu}_i, \quad (3.4.22)$$

se tiene que

$$\mathbf{T}_{oe}(p_j)\boldsymbol{\mu}_j = \boldsymbol{\xi}_c^{-1}(p_j) \left\{ \boldsymbol{\Gamma}_1(\boldsymbol{\xi}_c(p_1)) + \sum_{i=2}^{n_{pu}} B_i(p_j)\boldsymbol{\Gamma}_i(\mathbf{X}_i) \right\} \boldsymbol{\mu}_j \quad (3.4.23)$$

$$= \boldsymbol{\xi}_c^{-1}(p_j) \{ \boldsymbol{\Gamma}_1(\boldsymbol{\xi}_c(p_1)) + \boldsymbol{\Gamma}_j(\mathbf{X}_j) \} \boldsymbol{\mu}_j \quad (3.4.24)$$

$$= \boldsymbol{\xi}_c^{-1}(p_j) \{ \boldsymbol{\Gamma}_1(\boldsymbol{\xi}_c(p_1)) + \mathbf{X}_j \} \boldsymbol{\mu}_j. \quad (3.4.25)$$

Reemplazando (3.4.19) en la última expresión, se puede notar que la condición de interpolación de polos (2.5.11) se satisface como

$$\mathbf{T}_{oe}(p_j)\boldsymbol{\mu}_j = \boldsymbol{\xi}_c^{-1}(p_j) \{ \boldsymbol{\Gamma}_1(\boldsymbol{\xi}_c(p_1)) + \boldsymbol{\xi}_c(p_j) - \boldsymbol{\Gamma}_1(\boldsymbol{\xi}_c(p_1)) \} \boldsymbol{\mu}_j \quad (3.4.26)$$

$$= \boldsymbol{\mu}_j. \quad (3.4.27)$$

Por otro lado, como  $\boldsymbol{\xi}_c^{-1}(z)$  posee los mismos ceros de FNM (ubicación y dirección) que  $\mathbf{G}(z)$  y  $B_i(z)$  es estable y propio, entonces de acuerdo a (3.4.18)  $\mathbf{T}_{oe}(z)$  tiene los mismos ceros de FNM que  $\mathbf{G}(z)$  (y con la misma dirección), con lo cual la condición de interpolación de ceros (2.5.10) se satisface en forma trivial.

□□□

El siguiente ejemplo ilustra la aplicación del Lema 3.4 para un sistema MIMO simple.

**Ejemplo 3.2:** *Considérese un sistema MIMO descrito por la matriz de transferencia*

$$\mathbf{G}(z) = \begin{bmatrix} \frac{z-2}{z(z-1.5)} & \frac{1}{z-1.5} \\ 0 & \frac{1}{z-3} \end{bmatrix}. \quad (3.4.28)$$

$\mathbf{G}(z)$  tiene dos ceros de FNM en infinito, otro finito y dos polos inestables:

$$c_1 = \infty, \quad \boldsymbol{\eta}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (3.4.29)$$

$$c_2 = \infty, \quad \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad (3.4.30)$$

$$c_3 = 2, \quad \boldsymbol{\eta}_3 = \begin{bmatrix} 0.447 & 0.894 \end{bmatrix}^T, \quad (3.4.31)$$

$$p_1 = 1.5, \quad \boldsymbol{\mu}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (3.4.32)$$

$$p_2 = 3, \quad \boldsymbol{\mu}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad (3.4.33)$$

en donde se ha usado la notación del enunciado del Lema 3.4. Usando el algoritmo descrito en el Lema 2.5 el GLUI de  $\mathbf{G}(z)$  resulta

$$\boldsymbol{\xi}_c(z) = \begin{bmatrix} \frac{0.4z(z-3.5)}{z-2} & \frac{-1.2z(z-1)}{z-2} \\ \frac{-1.2z(z-1)}{z-2} & \frac{-1.4z(z-0.286)}{z-2} \end{bmatrix}. \quad (3.4.34)$$

De este modo, de acuerdo a (3.4.18) la función de sensibilidad complementaria esencial para  $\mathbf{G}(z)$  es

$$\mathbf{T}_{oe}(z) = \begin{bmatrix} \frac{1.69(z-0.993)(z-0.0398)}{z(z-0.5)(z-2/3)} & \frac{3.13(z-3)(z-1.45)}{z(z-0.5)(z-2/3)} \\ \frac{-2.73(z-1.5)(z-0.781)}{z(z-0.5)(z-2/3)} & \frac{10.38(z-1.613)(z-1.784)}{z(z-0.5)(z-2/3)} \end{bmatrix}. \quad (3.4.35)$$

■

Es importante destacar que  $\mathbf{T}_{oe}(z)$  depende sólo de los ceros de FNM y polos inestables de la planta, por lo que puede ser calculada en forma explícita sin recurrir a ningún procedimiento de diseño. Esto indica que la sensibilidad complementaria esencial del Lema 3.4 captura lo estrictamente necesario para generar un lazo admisible y es apropiada para ser empleada como sensibilidad admisible en la parametrización alternativa de Youla (3.3.4).

Además, debe notarse que, al igual que en el caso SISO, la forma de la sensibilidad complementaria esencial en el Lema 3.4 presenta algunas elecciones arbitrarias, a saber:

- (a) El ordenamiento del conjunto de polos inestables de la planta influye en  $\mathbf{T}_{oe}(z)$  dependiendo de cuál polo sea elegido como  $p_1$ .
- (b) En la formulación del Lema 3.4 se han usado interactores unitarios de ceros para la construcción de  $\mathbf{T}_{oe}(z)$ . La unitariedad de los interactores no es estrictamente necesaria (ver [1]), pero en este escrito se han usado interactores con esa propiedad tanto por las ventajas analíticas que proveen, como por la disponibilidad de algoritmos simples para su construcción. La elección de interactores unitarios ciertamente fija los polos de  $\mathbf{T}_{oe}(z)$  de manera arbitraria y los ubica en los reflejos estables de los ceros de FNM y polos inestables de la planta.

Más allá de la importancia conceptual de la sensibilidad complementaria esencial, su uso en conjunto con la parametrización alternativa de Youla del Lema 3.2 puede proveer herramientas analíticas potentes para resolver de manera explícita ciertos problemas de optimización cuadrática que surgen en distintas áreas de la teoría del control. En la sección siguiente se da un ejemplo detallado con respecto a este punto.

### 3.5. Ejemplo

Como ya se ha visto, la sensibilidad complementaria esencial es una buena candidata para ser elegida como sensibilidad admisible  $\mathbf{S}_{oo}(z) = \mathbf{I} - \mathbf{T}_{oe}(z)$  en la parametrización alternativa de Youla (3.3.3). De este modo, a fin de ilustrar las ventajas de tener una expresión explícita para  $\mathbf{S}_{oo}(z)$  que depende sólo de ciertos rasgos dinámicos de la planta (polos inestables y ceros de FNM) y es independiente de algún procedimiento de diseño, considérese el siguiente problema de optimización cuadrática:

**Problema 3.1:** *Dada un función de transferencia SISO  $G(z) \in \mathcal{RL}_2$  estrictamente propia y sin ceros sobre la circunferencia unitaria, hallar la función de sensibilidad de un lazo admisible en torno a  $G(z)$  que posee la mínima norma 2, es decir, se desea hallar*

$$S_o^{opt}(z) = \arg \min_{S_o(z) \in \mathcal{X}} \|S_o(z)\|_2^2, \quad (3.5.1)$$

donde  $\mathcal{X}$  denota el conjunto de todas las funciones de sensibilidad admisibles y  $S_o(z) = (1 + G(z)C(z))^{-1}$ .

Como el próximo lema deja de manifiesto, el uso adecuado de  $T_{oe}(z)$  en conjunto con la parametrización alternativa de Youla permiten obtener un solución explícita al problema de optimización (3.5.1).

**Lema 3.5:**

Sea  $G(z)$  una función de transferencia que satisface las condiciones del Problema 3.1 con  $n_{pu}$  polos inestables simples denotados por  $\{p_1, p_2, \dots, p_{n_{pu}}\}$ . Entonces la función de sensibilidad de mínima norma 2 está dada por

$$S_o^{opt}(z) = 1 - \hat{T}_o(z) \quad (3.5.2)$$

$$= 1 - \xi_c^{-1}(z) \left\{ \sum_{i=2}^{n_{pu}} (B_i(z) + M_i \xi_p^{-1}(z)) (\xi_c(p_i) - \xi_c(p_1)) + \xi_c(p_1) (1 - N \xi_p^{-1}(z)) \right\}, \quad (3.5.3)$$

donde  $\xi_c(z)$  ( $\xi_p(z)$ ) es un GLUI de  $G(z)$  ( $G^{-1}(z)$ ), el factor  $B_i(z)$  se define como en (3.4.2) y las constantes  $M_i$  y  $N$  se calculan como

$$M_i = \frac{1}{p_i} \frac{1-p_i}{1-\bar{p}_i} \cdot \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq i}}^{n_{pu}} \frac{1-p_\ell}{1-\bar{p}_\ell} \frac{1-p_i \bar{p}_\ell}{p_i - p_\ell}, \quad (3.5.4)$$

$$N = \prod_{j=1}^{n_{pu}} \frac{1}{p_j} \cdot \frac{p_j - 1}{1 - \bar{p}_j} \quad (3.5.5)$$

**Demostración:**

Usando la parametrización descrita en el Lema 3.2, la solución al Problema 3.1 puede ser escrita como

$$S_o^{opt}(z) = S_{oo}(z) + \xi_c^{-1} X^{opt}(z) \xi_p^{-1}(z), \quad (3.5.6)$$

donde

$$X^{opt}(z) = \arg \min_{X \in \mathcal{RH}_\infty} \underbrace{\|S_{oo}(z) - \xi_c^{-1}(z) X(z) \xi_p^{-1}(z)\|_2^2}_{J(X(z))}, \quad (3.5.7)$$

y  $S_{oo}(z)$  es alguna función de sensibilidad admisible para  $G(z)$ . Nótese que de acuerdo al Lema 3.2,  $\xi_c(z)$  y  $\xi_p(z)$  son GLUI asociados a las matrices que conforman factorizaciones coprimas en  $\mathcal{RH}_\infty$  de  $G(z)$ . No obstante, como  $G(z)$  en este caso es escalar, esto es equivalente a que  $\xi_c(z)$  ( $\xi_p(z)$ ) sea GLUI de  $G(z)$  ( $G^{-1}(z)$ ).

Usando la propiedad (A.3.7), el funcional  $J(X)$  puede ser expresado de la forma

$$J(X(z)) = \|X(z) - \xi_c(z) S_{oo}(z) \xi_p(z)\|_2^2 \quad (3.5.8)$$

Si la sensibilidad admisible *inicial* es elegida como aquella asociada a la sensibilidad com-

plementaria esencial del Lema 3.3, es decir, si se elige  $S_{oo}(z) = 1 - T_{oe}(z)$ , entonces resulta

$$J(X(z)) = \|X(z) - \xi_c(z)\xi_p(z) + \xi_c(z)T_{oe}(z)\xi_p(z)\|_2^2 \quad (3.5.9)$$

Reemplazando (3.4.1) en la última expresión queda

$$J(X(z)) = \left\| X(z) - \xi_c(z)\xi_p(z) + \xi_c[p_1]\xi_p(z) + \sum_{i=2}^{n_{pu}} B_i(z) (\xi_c[p_i] - \xi_c[p_1]) \xi_p(z) \right\|_2^2. \quad (3.5.10)$$

En el caso SISO, el factor  $\xi_p(z)$  puede ser expresado como un producto de Blaschke [6] de la forma

$$\xi_p(z) = \prod_{\ell=1}^{n_p} \frac{1 - p_\ell}{1 - \bar{p}_\ell} \cdot \frac{1 - z\bar{p}_\ell}{z - p_\ell}. \quad (3.5.11)$$

Reemplazando (3.4.2) y (3.5.11) en (3.5.10) se obtiene

$$J(X(z)) = \left\| X(z) - \underbrace{\left( \xi_c(z)\xi_p(z) - \xi_c[p_1]\xi_p(z) - \sum_{i=2}^{n_{pu}} \left( \frac{1 - z\bar{p}_i}{z - p_i} \right) p_i M_i (\xi_c[p_i] - \xi_c[p_1]) \right)}_{F(z)} \right\|_2^2, \quad (3.5.12)$$

donde  $M_i$  se define como en (3.5.4). Dado que  $X(z) \in \mathcal{RH}_\infty$ , es conveniente introducir un factor unitario  $z^{-1}$  de modo tal que el funcional resulta

$$J(X(z)) = \left\| \underbrace{\frac{X(z)}{z}}_{\tilde{X}(z)} - \underbrace{\frac{F(z)}{z}}_{\tilde{F}(z)} \right\|_2^2, \quad (3.5.13)$$

donde debe notarse que  $\tilde{X}(z) \in \mathcal{RH}_2$ . Mas aún, como  $F(z) \in \mathcal{RH}_2^\perp$ ,  $\tilde{F}(z)$  tiene, además de todos los polos inestables de  $G(z)$ , un polo en  $z = 0$ . Esto implica que con una expansión en fracciones parciales de  $\tilde{F}(z)$ ,  $J(X)$  se puede calcular como

$$J(X(z)) = \left\| \tilde{X}(z) - \frac{F(0)}{z} - [\tilde{F}(z)]_\perp \right\|_2^2, \quad (3.5.14)$$

donde  $[\tilde{F}(z)]_\perp$  es la porción en  $\mathcal{RH}_2^\perp$  de  $\tilde{F}(z)$ . Usando la descomposición ortogonal (2.3.1),

el funcional en (3.5.14) resulta

$$J(X(z)) = \left\| \tilde{X}(z) - \frac{F(0)}{z} \right\|_2^2 + \left\| [\tilde{F}(z)]_{\perp} \right\|_2^2. \quad (3.5.15)$$

De este modo, el parámetro de Youla que minimiza  $J(X)$  es tal que minimiza el primer sumando de la expresión anterior, es decir,

$$X^{opt}(z) = F(0). \quad (3.5.16)$$

Dado que  $G(z)$  es estrictamente propia, entonces  $\xi_c(0) = 0$  y

$$X^{opt}(z) = \sum_{i=2}^{n_{pu}} M_i (\xi_c(p_i) - \xi_c(p_1)) - \xi_c(p_1) \xi_p(0) \quad (3.5.17)$$

$$= \sum_{i=2}^{n_{pu}} M_i (\xi_c(p_i) - \xi_c(p_1)) - \xi_c(p_1) N, \quad (3.5.18)$$

donde  $N$  se define como en (3.5.5). Finalmente, reemplazando (3.5.18) en (3.5.6), se obtiene el resultado (3.5.2)-(3.5.5).

□□□

### 3.6. Conclusiones

Obtener caracterizaciones generales para todos los controladores admisibles asociados a una planta es un herramienta útil para resolver algunos problemas de control basados en optimización. En efecto, si las funciones de sensibilidad del lazo admisible pueden ser expresadas en forma afín respecto de cierto parámetro, entonces la resolución de problemas de optimización cuadrática puede ser simplificada de manera considerable.

En este capítulo se ha revisado la formulación clásica de la parametrización de Youla de todos los controladores admisibles. Dicha formulación es simple sólo en el caso que la planta es estable, ya que de lo contrario se presentan dos inconvenientes: (a) las expresiones involucradas son de un orden excesivo y, (b) requiere del conocimiento previo de un controlador admisible.

Para sobrellevar la primera dificultad se plantea una formulación alternativa que, gracias a un uso apropiado de los interactores de ceros, permite expresar las funciones de sensibilidad en términos de los rasgos dinámicos de la planta que imponen limitaciones fundamentales (ceros de FNM y polos inestables). Para el caso inestable, como este planteamiento se basa en parametrizar directamente la función de sensibilidad del lazo, la necesidad de disponer de un controlador admisible se traduce ahora en el conocimiento previo de una función de sensibilidad admisible.

---

Es así como el segundo inconveniente se aborda mediante la definición del concepto de esencialidad. La contribución principal de este capítulo radica en que gracias a esta idea se puede identificar una función de sensibilidad complementaria que tiene las características estrictamente necesarias para garantizar un lazo admisible. De este modo, para una clase importante de sistemas MIMO se obtiene una forma explícita para la denominada *función de sensibilidad complementaria esencial*, la cual puede ser calculada por inspección directa de la matriz de transferencia de la planta y *sin recurrir a ningún procedimiento de diseño*. Un ejemplo SISO deja en evidencia que este resultado usado en conjunto con la parametrización alternativa de Youla es potencialmente útil para resolver una clase amplia de problemas de optimización cuadrática.

# LÍMITES DE DESEMPEÑO EN CONTROL CENTRALIZADO

### 4.1. Introducción

El tema principal de esta tesis es el límite de desempeño de lazos de control MIMO con controladores de estructura restringida. No obstante, tal como se puede ver en el Capítulo 6, los resultados relativos a este tema descansan fuertemente en aquellos correspondientes a límites de desempeño cuando el controlador no posee ningún tipo de restricción estructural, es decir, cuando la ley de control es *centralizada*. El principal objetivo del presente capítulo es justamente hacer una revisión de las ideas y resultados claves dentro de este tema, a fin de que los resultados originales de esta tesis puedan ser fundamentados de buena forma.

De este modo, las interrogantes abordadas en el presente capítulo son: dada una medida del desempeño de un lazo (esto es, una medida de su calidad), *¿cuál es el mejor desempeño alcanzable por un lazo de control centralizado?*, *¿cuál es el controlador que logra dicho desempeño óptimo?* Si bien en la literatura [86] existen algunos trabajos con resultados de tipo numérico respecto a este tema, debe enfatizarse que nuestro interés está en los resultados analíticos. Se prefiere este enfoque debido a que las expresiones analíticas permiten interpretaciones acabadas y facilitan la identificación de los rasgos dinámicos de la planta que de algún modo *limitan* el mejor desempeño alcanzable al controlarla.

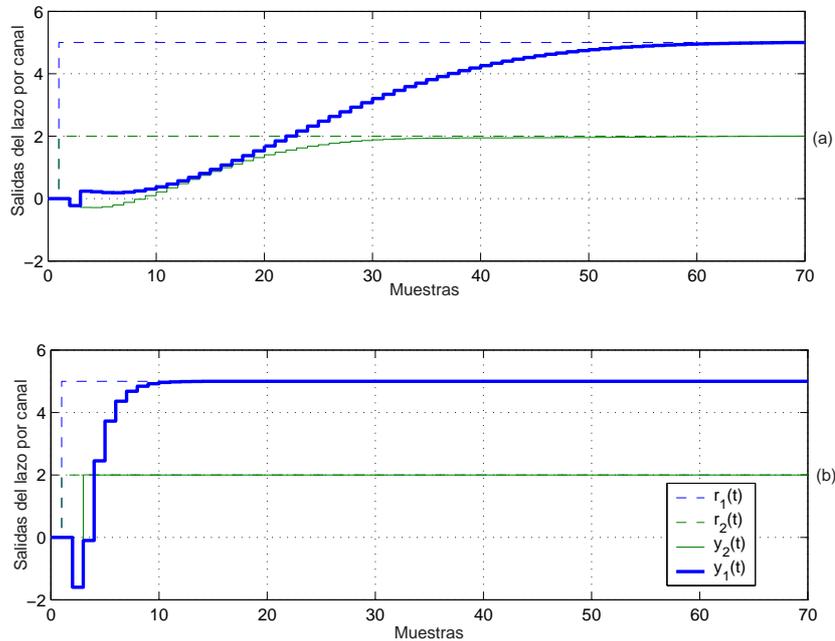
Los resultados expuestos en este capítulo están basados fundamentalmente en [12, 13, 28], pero se sugiere además consultar [10, 11, 41–44] en donde se pueden encontrar tanto resultados parciales como algunas extensiones. En particular, una extensión interesante que aborda un caso no considerado en esta tesis se encuentra en [42], donde se agrega penalización en la señal de actuación.

## 4.2. Definición del problema y medida de desempeño

La cuantificación del mejor desempeño alcanzable por un lazo de control requiere la definición de una medida del desempeño que sea representativa de los objetivos de control. Una alternativa plausible es medir el desempeño en términos de la calidad del seguimiento del lazo ante, por ejemplo, referencias constantes. En efecto, en base al esquema de control de la Fig. 2.1, suponiendo que el lazo provee seguimiento perfecto de referencias constantes y que la referencia es del tipo  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}\mu(t)$  con  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ , entonces se puede definir la cantidad

$$J_v = \sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{e}^T(t)\mathbf{e}(t). \quad (4.2.1)$$

La medida  $J_v$  corresponde a la energía de la señal de error [6, 69, 76] en el lazo y es representativa de la calidad del transiente de éste cuando la referencia es de tipo escalón con dirección  $\mathbf{v}$  (diremos que un lazo tiene un desempeño mejor que otro si tiene un valor de  $J_v$  menor). A modo de ejemplo, en la Fig. 4.1 se presentan las respuestas de dos lazos con desempeños distintos medidos en términos del funcional  $J_v$  cuando  $\mathbf{v} = [5 \ 2]^T$ .



**Figura 4.1.** Respuestas de un lazo  $2 \times 2$  centralizado ante referencia  $\mathbf{r}(t) = [5 \ 2]^T \mu(t)$ : (a) Desempeño deficiente  $J_v = 530$ , (b) Desempeño satisfactorio  $J_v = 120$ .

Mediante la relación de Parseval [6, 69, 76], el funcional  $J_v$  puede expresarse en el dominio

de la frecuencia como

$$J_v = \|\mathbf{E}(z)\|_2^2 \quad (4.2.2)$$

$$= \|\mathbf{S}_o(z)\mathbf{R}(z)\|_2^2 \quad (4.2.3)$$

$$\Rightarrow J_v = \left\| \mathbf{S}_o(z) \frac{\mathbf{v}}{z-1} \right\|_2^2, \quad (4.2.4)$$

donde se ha usado el hecho que la función de sensibilidad  $\mathbf{S}_o(z)$  es la que relaciona la señal de referencia con el error y  $\mathcal{Z}\{\mathbf{r}(t)\} = \mathbf{v}/(z-1)$ .

El funcional  $J_v$  depende fuertemente de la dirección de la referencia  $\mathbf{v}$  y, como indican los resultados reportados en [13], si la planta es inestable, entonces el valor óptimo de  $J_v$  puede ser muy sensible ante pequeños cambios en  $\mathbf{v}$ . Esto motiva la definición de una medida de desempeño que sea independiente de la dirección del vector de referencia pero que a su vez, siga teniendo sentido desde el punto de vista de los objetivos de control.

De hecho, consideremos que  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}\mu(t)$  y que la dirección  $\mathbf{v}$  es una variable aleatoria tal que

$$\mathcal{E}_v\{\mathbf{v}\} = \mathbf{0}, \quad (4.2.5)$$

$$\mathcal{E}_v\{\mathbf{v}\mathbf{v}^T\} = \mathbf{I}, \quad (4.2.6)$$

donde  $\mathcal{E}_v\{\cdot\}$  denota el operador esperanza [87] con respecto a la distribución de  $\mathbf{v}$ . Podemos pensar en medir el desempeño en términos de  $J_v$  promediando entre todas las direcciones  $\mathbf{v}$  posibles. Matemáticamente esto es equivalente a considerar el funcional

$$J = \mathcal{E}_v\{J_v\}. \quad (4.2.7)$$

Si se usa la definición de  $J_v$  y de la norma 2 en (A.3.6) junto con la linealidad del operador  $\mathcal{E}_v\{\cdot\}$ , la medida  $J$  resulta

$$J = \mathcal{E}_v \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{traza} \left\{ \left( \mathbf{S}_o(e^{j\omega}) \frac{\mathbf{v}}{e^{j\omega}-1} \right)^H \left( \mathbf{S}_o(e^{j\omega}) \frac{\mathbf{v}}{e^{j\omega}-1} \right) \right\} d\omega \right\} \quad (4.2.8)$$

$$= \mathcal{E}_v \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{traza} \left\{ \mathbf{v}\mathbf{v}^H \left( \frac{\mathbf{S}_o(e^{j\omega})}{e^{j\omega}-1} \right)^H \left( \frac{\mathbf{S}_o(e^{j\omega})}{e^{j\omega}-1} \right) \right\} d\omega \right\} \quad (4.2.9)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{traza} \left\{ \mathcal{E}_v\{\mathbf{v}\mathbf{v}^H\} \left( \frac{\mathbf{S}_o(e^{j\omega})}{e^{j\omega}-1} \right)^H \left( \frac{\mathbf{S}_o(e^{j\omega})}{e^{j\omega}-1} \right) \right\} d\omega \quad (4.2.10)$$

$$\Rightarrow J = \left\| \mathbf{S}_o(z) \frac{1}{z-1} \right\|_2^2. \quad (4.2.11)$$

La relación (4.2.11) entrega una expresión compacta para el funcional  $J$ . Esta nueva medida

del desempeño no tiene una interpretación temporal tan directa como la de  $J_v$ , no obstante, tiene la ventaja de ser independiente de la dirección de la referencia y de subsanar los problemas descritos en [13].

En la sección siguiente se entrega el resultado más importante de este capítulo, a saber, una expresión analítica para el límite de desempeño medido en términos de  $J_v$  y  $J$  para el caso en que la planta es estable.

### 4.3. Límite de desempeño

En base a los resultados del Capítulo 3 referentes a la parametrización de Youla [4–6], sabemos que si la planta  $\mathbf{G}(z)$  es estable, entonces la función de sensibilidad de todos los lazos estables y realizables se puede parametrizar como

$$\mathbf{S}_o(z) = \mathbf{I} - \mathbf{G}(z)\mathbf{Q}(z), \quad (4.3.1)$$

con  $\mathbf{Q}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$ . De este modo, el funcional  $J_v$  se puede expresar convenientemente en términos de  $\mathbf{Q}(z)$

$$J_v = \left\| \left( \mathbf{I} - \mathbf{G}(z)\mathbf{Q}(z) \right) \frac{\mathbf{v}}{z-1} \right\|_2^2. \quad (4.3.2)$$

A continuación se enuncia un lema relativo al mejor desempeño alcanzable por un lazo de control en términos del funcional  $J_v$  definido en (4.3.2). Nótese que si bien los resultados principales de este trabajo usan  $J$  como medida de desempeño, la cuantificación del valor óptimo de  $J_v$  es la base para derivar varios de ellos.

#### Lema 4.1 (Límite de desempeño centralizado medido con $J_v$ )

Sea  $\mathbf{G}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$  no singular c. e. t. p. y sin ceros sobre la circunferencia unitaria. Considérese  $J_v$  definido en (4.3.2) y defínase

$$J_{v \text{ opt}} = \min_{\mathbf{Q}(z) \in \mathcal{RH}_\infty} J_v, \quad (4.3.3)$$

$$\mathbf{Q}_{\text{opt}}(z) = \arg \min_{\mathbf{Q}(z) \in \mathcal{RH}_\infty} J_v. \quad (4.3.4)$$

Si el conjunto de ceros de FNM de  $\mathbf{G}(z)$  se denota como

$$\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \dots, c_{n_c}\}, \quad (4.3.5)$$

entonces:

(a) El parámetro de Youla óptimo,  $\mathbf{Q}_{opt}(z)$  es

$$\mathbf{Q}_{opt}(z) = (\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{G}}(z)\mathbf{G}(z))^{-1}, \quad (4.3.6)$$

donde  $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{G}}(z)$  es un GLUI de  $\mathbf{G}(z)$ .

(b) El costo óptimo  $J_{v\ opt}$  está dado por

$$J_{v\ opt} = \sum_{i=1}^{n_c} h(c_i) |\boldsymbol{\eta}_i^H \mathbf{v}|^2, \quad (4.3.7)$$

donde las direcciones  $\boldsymbol{\eta}_i$  se definen como en el Lema 2.5 con  $\mathbf{A}(z) = \mathbf{G}(z)$  y

$$h(c_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } c_i = \infty \\ \frac{|c_i|^2 - 1}{|1 - c_i|^2} & \text{si } |c_i| < \infty \end{cases}. \quad (4.3.8)$$

**Demostración:**

Ver [12, 28].

□□□

El Lema 4.1 entrega expresiones explícitas para el desempeño óptimo  $J_{v\ opt}$  y para el controlador que lo logra. Constituye además una base importante para algunos de los resultados de los capítulos siguientes y, en particular, permite el cómputo del límite de desempeño con control centralizado medido en términos del funcional  $J$  definido en (4.2.11).

En efecto, si se considera, al igual que para el caso anterior, que la planta  $\mathbf{G}(z)$  es estable, entonces  $J$  se puede escribir como

$$J = \left\| \left( \mathbf{I} - \mathbf{G}(z)\mathbf{Q}(z) \right) \frac{1}{z-1} \right\|_2^2, \quad (4.3.9)$$

donde  $\mathbf{Q}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$ . El siguiente lema entrega el resultado en cuestión.

**Lema 4.2 (Límite de desempeño centralizado medido con  $J$ )**

Sea  $\mathbf{G}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$  no singular c. e. t. p. y sin ceros sobre la circunferencia unitaria. Considérese  $J$  definido en (4.3.9) y defínase

$$J_{opt} = \min_{\mathbf{Q}(z) \in \mathcal{RH}_\infty} J, \quad (4.3.10)$$

$$\mathbf{Q}_{opt}(z) = \arg \min_{\mathbf{Q}(z) \in \mathcal{RH}_\infty} J. \quad (4.3.11)$$

Si el conjunto de ceros de FNM de  $\mathbf{G}(z)$  se denota como

$$\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \dots, c_{n_c}\}, \quad (4.3.12)$$

entonces:

(a) El parámetro de Youla óptimo,  $\mathbf{Q}_{opt}(z)$  es

$$\mathbf{Q}_{opt}(z) = (\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{G}}(z)\mathbf{G}(z))^{-1}, \quad (4.3.13)$$

donde  $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{G}}(z)$  es un GLUI de  $\mathbf{G}(z)$ .

(b) El costo óptimo  $J_{opt}$  está dado por

$$J_{opt} = \sum_{i=1}^{n_c} h(c_i) \quad (4.3.14)$$

$$= d + \sum_{i=1}^r \frac{|q_i|^2 - 1}{|1 - q_i|^2}, \quad (4.3.15)$$

donde  $h(c_i)$  se define como en (4.3.8),  $\{q_1, q_2, \dots, q_r\} \subseteq \mathcal{C}$  es el conjunto de ceros de FNM finitos de  $\mathbf{G}(z)$  y  $d$  es el número de ceros en infinito de  $\mathbf{G}(z)$  (es decir,  $d = g_{rel}\{\mathbf{G}(z)\}$ ).

#### **Demostración:**

La demostración es directa siguiendo los mismos pasos que la de Lema 4.1 pero usando  $\mathbf{v} = 1$ . Ver [12, 28] para más detalles.

□□□

A partir los Lemas 4.1 y 4.2 se puede notar que el controlador óptimo que entrega el mejor desempeño posible es independiente de si éste se mide con  $J_v$  o  $J$ . Dicho controlador está asociado a un parámetro de Youla  $\mathbf{Q}(z)$  que es un inverso aproximado [6] de la planta en el cual se han reemplazado los ceros de FNM por sus reflejos estables.

Por otro lado, el desempeño óptimo en ambos casos depende sólo de los ceros de FNM, de modo tal que como

$$\lim_{q_i \rightarrow 1} \frac{|q_i|^2 - 1}{|1 - q_i|^2} = \infty, \quad (4.3.16)$$

$$\lim_{q_i \rightarrow -1} \frac{|q_i|^2 - 1}{|1 - q_i|^2} = 0, \quad (4.3.17)$$

se concluye que la situación se agrava, es decir  $J_{opt}$  crece exageradamente, si un cero de FNM está ubicado muy cerca de  $z = 1$ . Esto implica que los ceros de FNM cercanos a  $z = 1$  son los

más dañinos en términos de limitar el mejor desempeño alcanzable. Además, (4.3.17) deja en evidencia que pueden haber ceros de FNM cercanos al disco unitario que no necesariamente tienen un impacto significativo en el desempeño óptimo. Este resultado es coherente con otros relativos a limitaciones fundamentales [6, 18, 75, 88] que indican que plantas con estas características son, en general, difíciles de controlar de una manera razonable.

#### 4.4. Conclusiones

Los resultados de este capítulo versan sobre el cómputo explícito del límite de desempeño alcanzable por un lazo de control sin restricciones estructurales cuando la planta es estable. Se definen dos medidas de desempeño que tienen su origen en la idea de cuantificar la energía del error de seguimiento. Una de ellas corresponde exactamente a dicha cantidad, mientras que la otra es un promedio de ésta sobre todas las direcciones de referencia posibles. No obstante, ambas son minimizadas por un mismo controlador que refleja el paradigma elemental relacionado con que éste genere un inverso aproximado de la planta.

Desde el punto de vista del mejor desempeño alcanzable, los resultados indican que éste puede verse seriamente deteriorado cuando los ceros de FNM de la planta son muy cercanos a  $z = 1$ . Esto tiene sentido a la luz de resultados previos que indican que dichos rasgos dinámicos imponen limitaciones fundamentales.

# CONTROL CON ESTRUCTURA RESTRINGIDA

### 5.1. Introducción

En el presente capítulo se abordan ideas esenciales relativas al control con estructura restringida y al problema de límites de desempeño asociado. Corresponde sin duda a uno de los capítulos más importantes de este trabajo de tesis, ya que condensa algunos de los resultados originales de mayor alcance y relevancia. Una versión compacta de los temas aquí expuestos se puede encontrar en [2].

En este capítulo se plantea el problema de límites de desempeño cuando la ley de control está subordinada a tener una determinada estructura. Tal como exponen diversos resultados reportados en la literatura [61, 62, 84, 85, 89, 90], el problema de optimización cuadrática asociado no es convexo, por lo que su resolución analítica es difícil. En este aspecto, se entrega una condición suficiente para garantizar la convexidad del problema de optimización asociado que será la base para los resultados del próximo capítulo. Esta condición es algo más restrictiva que la existente en la literatura [84, 89], no obstante, como se dejará de manifiesto más adelante, tiene la ventaja de ser mucho más simple de manejar.

La condición que se deriva en este capítulo para garantizar la convexidad del problema de límites de desempeño requiere que la planta posea la misma estructura que aquella que se quiere imponer al controlador. Esto motiva el estudio de las propiedades estructurales del controlador óptimo centralizado cuando la planta tiene una determinada estructura. Los resultados indican que este tema está íntimamente relacionado con la diagonalidad del interactor unitario de ceros generalizado del Lema 2.5 en la pág. 22. De este modo, se entrega una caracterización bastante simple de las plantas que poseen un GLUI diagonal, la que depende esencialmente de una propiedad especial de los ceros de FNM. Adicionalmente y como un resultado paralelo se demuestra que el GLUI es único.

Finalmente, estos desarrollos permiten establecer condiciones bajo las cuales el controlador centralizado que logra el desempeño óptimo es estructurado *per se*. Este resultado es

de gran relevancia para los intereses de esta tesis, ya que en definitiva permite distinguir la clase de plantas para las cuales la restricción estructural sobre el controlador no ocasiona ningún deterioro en el mejor desempeño alcanzable.

## 5.2. Motivación y estructuras de interés

La necesidad de imponer restricciones estructurales sobre el controlador puede provenir de dos fuentes principales:

(a) Simplicidad.

Los controladores de tipo centralizado son, en general, de alta complejidad. Esto se traduce en dificultades para tener una idea clara de cómo afectan los parámetros de ajuste del controlador en la calidad del lazo y en diseños de baja integridad [7, 33]. De este modo, los procedimientos de ajuste y mantenimiento de controladores centralizados son engorrosos y, por ende, suele preferirse estrategias de control de estructura restringida que subsanen dichos inconvenientes.

(b) Restricciones de implementación.

Un controlador centralizado puede requerir de instrumentación que es inaccesible por razones físicas y/o económicas [35]. Un ejemplo claro de esta situación es la red de distribución eléctrica, en donde es evidente que ejercer un control centralizado es de alto costo y gran complejidad tecnológica dada la gran cantidad de variables involucradas y las limitaciones físicas que dificultan la transmisión de las mismas.

Si se requiere imponer restricciones estructurales en el control de un determinado proceso, es claro que pueden haber ciertas estructuras que son muy ineficientes o simplemente proveen desempeños muy pobres en términos de los objetivos de control. Esto obliga a disponer de métodos y criterios sistemáticos para seleccionar la estructura de control más apropiada para una determinada planta. Desarrollos en este tema se pueden encontrar en abundancia. Dentro de las principales herramientas de selección de estructura se encuentran el arreglo de ganancia relativa (RGA) [36], el arreglo de ganancia relativa dinámico (DRGA) [37, 38], el índice de Niederlinsky (NI) [39] y la Matriz de Participación (MP) [34, 40]. Todas estas herramientas miden el nivel de interacción entre los distintos subsistemas que componen la planta MIMO, para luego determinar en base a ciertos criterios qué interacciones dinámicas son las más relevantes dentro del conjunto y así poder descartar algunas dentro el proceso de diseño del controlador.

No obstante lo anterior, en ciertos tipos de sistemas que son inherentemente estructurados [61], la estructura que se impone sobre el controlador es heredada a partir de aquella de la planta. Esta situación es de particular interés en esta tesis y es el tema principal del próximo capítulo. A continuación se explora con detención esta idea para los conjuntos de

restricciones estructurales (CRE) de interés en este trabajo, definidas en (2.6.1)-(2.6.3) en la pág. 31.

### Estructura diagonal por bloques $\mathcal{S}_d$

Las plantas con modelo de tipo diagonal por bloques surgen en forma natural al agrupar sistemas definidos por un subconjunto de entradas y salidas en un único modelo. De esta manera, si se desea diseñar cierto controlador restringido en estructura para una planta de tipo  $\mathcal{S}_d$ , entonces la elección obvia es elegir a  $\mathcal{S}_d$  como el CRE para el controlador. Esta elección permite diseñar de manera independiente cada bloque de  $\mathbf{C}(z)$  para su correspondiente bloque en la planta  $\mathbf{G}(z)$ . El caso más simple de este caso es el conocido control descentralizado [48–60], el cual considera  $n_i = 1, \forall i$  en (2.6.1), y por ende el diseño MIMO puede ser visto como el diseño de  $n$  lazos de control escalar independientes.

### Estructura rala simple $\mathcal{S}_1$

De acuerdo a (2.6.2) en la pág. 31, el CRE  $\mathcal{S}_1$  es el siguiente paso en complejidad estructural ya que incluye al CRE de tipo  $\mathcal{S}_d$  y agrega un subsistema que describe la interacción entre dos canales adicionales. Debe notarse que para una planta  $\mathbf{G}(z) \in \mathcal{S}_1$ , la elección natural para la estructura del controlador es la misma  $\mathcal{S}_1$ . Para aclarar esta afirmación, considérese a  $Y_i(z)$  como la transformada  $\mathcal{Z}$  de la  $i$ -ésima salida de  $\mathbf{G}(z)$ . Entonces, la relación entre  $Y_i(z)$  y la entrada  $\mathbf{U}(z)$  es

$$Y_i(z) = \begin{cases} G_{ii}(z)U_i(z) & i \neq k. \\ G_{k\ell}(z)U_\ell(z) + G_{kk}(z)U_k(z) & i = k. \end{cases} \quad (5.2.1)$$

Esta relación implica que el efecto de  $U_\ell(z)$  en  $Y_k(z)$  es nulo si y sólo si

$$U_k(z) = C_{kk}(z)E_k(z) - (G_{kk}(z))^{-1} G_{k\ell}(z)C_{\ell\ell}(z)E_\ell(z), \quad (5.2.2)$$

donde  $E_i(z)$  es la transformada  $\mathcal{Z}$  del error en el  $i$ -ésimo canal del lazo. Además, como  $G_{k\ell}(z)$  no tiene efecto en los demás canales, entonces para compensar el efecto de  $G_{k\ell}(z)$  basta con considerar un controlador de tipo  $\mathcal{S}_1$ . Es necesario enfatizar que este enfoque es de tipo intuitivo y se realiza sólo con fines ilustrativos, ya que en general (5.2.2) es una relación ideal que normalmente entrega controladores que no son admisibles.

### Estructura triangular $\mathcal{S}_t$

El CRE  $\mathcal{S}_t$  es el más general de los tipos de estructuras consideradas en esta tesis. Su definición (2.6.3) en la pág. 31 corresponde a una estructura triangular inferior, no obstante, cualquier estructura triangular puede ser llevada a una de tipo  $\mathcal{S}_t$  mediante un ordenamiento

apropiado de las entradas y salidas del sistema.

Ejemplos de sistemas que en forma natural tienen estructura triangular son los procesos químicos en cadena (neutralización de pH, destilación en cascada, etc.) y las formaciones de vehículos automáticos [61]. Si la planta  $\mathbf{G}(z) \in \mathcal{S}_t$ , entonces la motivación para emplear un controlador de la misma estructura pasa por preservar el sentido del flujo de información entre las distintas entradas y salidas de  $\mathbf{G}(z)$ . Para más detalles respecto a este punto, se sugiere al lector consultar [61].

### 5.3. El problema de límites en desempeño con estructura restringida

Dado que la cuantificación del mejor desempeño alcanzable por un lazo de control MIMO centralizado ha sido realizada en el Capítulo 4, cabe ahora preguntarse qué es lo que ocurre con el desempeño óptimo cuando se imponen restricciones estructurales sobre el controlador. De una manera intuitiva, es claro que en la medida que la estructura de control sea más simple, el mejor desempeño alcanzable será cada vez más deficiente. Esto significa que, en general, al forzar restricciones estructurales sobre el controlador se incurre necesariamente en un deterioro en el mejor desempeño posible.

Para dar una respuesta precisa a esta interrogante, es necesario plantear un problema de optimización que posee una dificultad considerable, tal como se explora en la sección siguiente.

#### 5.3.1. Dificultades asociadas al planteamiento general

Considérese una planta  $\mathbf{G}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$  y, en base a los resultados del capítulo anterior, defínase la medida de desempeño

$$J = \left\| \left( \mathbf{I} - \mathbf{G}(z)\mathbf{Q}(z) \right) \frac{1}{z-1} \right\|_2^2, \quad (5.3.1)$$

donde  $\mathbf{Q}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$  y tal que garantiza integración en el lazo. Como ya se ha visto, el funcional  $J$  corresponde al valor esperado de la energía del error de seguimiento cuando la referencia es del tipo  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}\mu(t)$ ,  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{v}$  es una variable aleatoria tal que  $\mathcal{E}\{\mathbf{v}\} = \mathbf{0}$  y  $\mathcal{E}\{\mathbf{v}\mathbf{v}^T\} = \mathbf{I}$  (ver desarrollo en pág. 52).

Forzar que el controlador  $\mathbf{C}(z)$  tenga una determinada estructura significa asegurar que  $\mathbf{C}(z) \in \mathcal{S}$  con  $\mathcal{S}$  algún CRE definido previamente. Esto implica, de acuerdo al Lema 3.1 en la pág. 34, que el parámetro de Youla  $\mathbf{Q}(z)$  debe ser tal que

$$\mathbf{Q}(z) (\mathbf{I} - \mathbf{G}(z)\mathbf{Q}(z))^{-1} \in \mathcal{S}. \quad (5.3.2)$$

Luego, el límite de desempeño cuando el controlador está restringido a  $\mathcal{S}$  está dado por

$$J_{\mathcal{S} \text{ opt}} = \min_{\substack{\mathbf{Q}(z) \in \mathcal{RH}_\infty \\ \mathbf{Q}(z)(\mathbf{I} - \mathbf{G}(z)\mathbf{Q}(z))^{-1} \in \mathcal{S}}} J. \quad (5.3.3)$$

Si  $\mathbf{G}(z)$  no tiene ninguna estructura en particular, el problema de optimización que se debe resolver en (5.3.3) posee un espacio de soluciones no convexo [2, 61, 62, 84, 85, 90]. Dicho de otro modo, si se desea garantizar cierta estructura sobre el controlador, entonces el espacio al cual debe pertenecer  $\mathbf{Q}(z)$  no es convexo. Luego, considerando que nuestro interés está en los resultados analíticos explícitos, la situación se complica considerablemente ya que los problemas de optimización no convexos no poseen necesariamente un mínimo global [91].

En la siguiente sección se establece una condición suficiente para la convexidad del problema de optimización (5.3.3) que permitirá obtener resultados importantes relativos a límites de desempeño con estructura restringida en el Capítulo 6.

### 5.3.2. Condiciones para la convexidad del problema

Las siguiente suposición es necesaria para los próximos desarrollos.

**Suposición 1:** *La matriz de transferencia  $\mathbf{G}(z)$  es estable, estrictamente propia y tiene ganancia a continua no singular, es decir,  $\mathbf{G}(z) \in \mathcal{RH}_2$  y  $\mathbf{G}(1)$  es no singular.*

Debe notarse que la suposición anterior no es muy restrictiva ya que si se trabaja con plantas reales, entonces  $\mathbf{G}(z)$  será estrictamente propia en la gran mayoría de los casos. Por otro lado, de acuerdo a la definición de la medida de desempeño  $J$  en (5.3.1),  $\mathbf{Q}(z)$  debe asegurar integración en el lazo. Una condición necesaria y suficiente para esto [6] es que  $\mathbf{Q}(1) = \mathbf{G}^{-1}(1)$ , lo cual a su vez usando la Suposición 1 implica que  $\mathbf{Q}(z)$  es no singular c. e. t. p. y, por ende, invertible.

Un concepto clave dentro de esta sección es el de *CRE estructuralmente cerrado bajo inversión*, definido de manera formal a continuación.

#### Definición 5.1 (CRE estructuralmente cerrado bajo inversión)

*Un conjunto de restricción estructural  $\mathcal{S}$  se dice estructuralmente cerrado bajo inversión si y sólo si para cada  $\mathbf{X}(z) \in \mathcal{S}$  tal que  $\mathbf{X}(z)$  es no singular c. e. t. p., entonces  $\mathbf{X}^{-1}(z)$  tiene la estructura de  $\mathcal{S}$ .*

Los CRE que son estructuralmente cerrados bajo inversión tiene la propiedad de ser convexos, tal como expone el lema siguiente.

#### Lema 5.1 (Convexidad de CRE estructuralmente cerrados bajo inversión)

*Sea  $\mathcal{S}$  un CRE estructuralmente cerrado bajo inversión, entonces  $\mathcal{S}$  es un conjunto convexo.*

**Demostración:**

Para demostrar que todo CRE estructuralmente cerrado bajo inversión es convexo, basta con probar que cualquier combinación lineal convexa [91, 92] de elementos en  $\mathcal{S}$  pertenece también a  $\mathcal{S}$ . Para ello, sean  $\mathbf{A}(z) \in \mathcal{S}$ ,  $\mathbf{B}(z) \in \mathcal{S}$  y defínase la combinación lineal convexa

$$\mathbf{C}(z) = \alpha \mathbf{A}(z) + (1 - \alpha) \mathbf{B}(z), \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (5.3.4)$$

Como  $\mathcal{S}$  es un CRE entonces  $\alpha \mathbf{A}(z) \in \mathcal{S}$ ,  $(1 - \alpha) \mathbf{B}(z) \in \mathcal{S}$  y, en consecuencia,  $\mathbf{C}(z) \in \mathcal{S}$ .

□□□

El próximo teorema [2] entrega un condición necesaria y suficiente para que las restricciones estructurales sobre  $\mathbf{C}(z)$  sean heredadas por  $\mathbf{Q}(z)$ .

**Teorema 5.1 (Restricciones estructurales sobre  $\mathbf{Q}(z)$ )**

Sea  $\mathcal{S}$  un CRE estructuralmente cerrado bajo inversión y sea  $\mathbf{G}(z)$  una matriz de transferencia que satisface la Suposición 1. Entonces  $\mathbf{C}(z) \in \mathcal{S}$ ,  $\forall \mathbf{Q}(z) \in \mathcal{S}$  si y sólo si  $\mathbf{G}(z) \in \mathcal{S}$ .

**Demostración:**

- ( $\Leftarrow$ ) Considérese  $\mathbf{Q}(z) \in \mathcal{S}$  que, de acuerdo a la Suposición 1, es no singular c. e. t. p. Como  $\mathbf{G}(z) \in \mathcal{S}$  es estrictamente propia, entonces la matriz

$$\mathbf{K}(z) = \mathbf{Q}^{-1}(z) - \mathbf{G}(z), \quad (5.3.5)$$

es no singular c. e. t. p. Además, dado que  $\mathcal{S}$  es estructuralmente cerrado bajo inversión, entonces  $\mathbf{Q}^{-1}(z) \in \mathcal{S}$  y por ende  $\mathbf{K}(z) \in \mathcal{S}$ . Estos argumentos implican que  $\mathbf{K}^{-1}(z)$  está bien definida y que  $\mathbf{K}^{-1}(z) \in \mathcal{S}$ . Luego, la necesidad se consigue notando que  $\mathbf{K}^{-1}(z) = \mathbf{Q}(z) (\mathbf{I} - \mathbf{G}(z) \mathbf{Q}(z))^{-1} = \mathbf{C}(z)$ .

- ( $\Rightarrow$ ) La suficiencia se obtiene usando los argumentos anteriores en el sentido inverso.

□□□

El Teorema 5.1 permite, bajo las suposiciones que  $\mathbf{G}(z)$  posee la misma estructura que la de  $\mathbf{C}(z)$  y que  $\mathcal{S}$  es un CRE estructuralmente cerrado bajo inversión, reformular el problema de optimización (5.3.3) como sigue

$$J_{\mathcal{S} \text{ opt}} = \min_{\mathbf{Q}(z) \in \mathcal{RH}_{\infty} \cap \mathcal{S}} J. \quad (5.3.6)$$

La convexidad de este problema está garantizada ya que tanto  $\mathcal{RH}_{\infty}$  como  $\mathcal{S}$  son espacios convexos. Esto es de suma importancia para los efectos de este trabajo de tesis, ya que los tres CRE de interés ( $\mathcal{S}_d$ ,  $\mathcal{S}_1$  y  $\mathcal{S}_t$ ) tienen la propiedad de ser estructuralmente cerrados

bajo inversión y, por ende, la formulación (5.3.6) permitirá calcular de manera explícita los límites de desempeño con estructura restringida en el capítulo siguiente. Nótese además que el Teorema 5.1 puede usarse para otros problemas de optimización de una naturaleza similar a la de aquel necesario para el cómputo de límites de desempeño. De hecho, esto se aprovecha en el Capítulo 7 para, mediante la inclusión de una función de ponderación en el funcional a optimizar, proponer un método de diseño de controladores de estructura triangular.

La condición del Teorema 5.1 puede abarcar estructuras más complejas que las aquí consideradas, ya que sólo basta con que éstas tengan la propiedad de ser estructuralmente cerradas bajo inversión. Esto abre la posibilidad de considerar, por ejemplo, casos como el de estructuras simétricas y las denominadas *skyline* [89].

La herencia estructural entre  $C(z)$  y  $Q(z)$  provista por el Teorema 5.1 es la misma que entrega un resultado ya existente en la literatura [84, 89] y que, por cierto, es más general. A continuación se enuncia éste en forma compacta a fin poder contrastarlo con el nuestro.

**Lema 5.2 (Invarianza cuadrática y restricciones sobre  $Q(z)$ )**

Sea  $G(z) \in \mathcal{RH}_\infty$  y sea  $\mathcal{S}$  un CRE, entonces  $C(z) \in \mathcal{S}, \forall Q(z) \in \mathcal{S}$  si y sólo si el conjunto  $\mathcal{S}$  es cuadráticamente invariante (QI) bajo  $G(z)$ , es decir satisface

$$C(z)G(z)C(z) \in \mathcal{S}, \quad \forall C(z) \in \mathcal{S} \quad (5.3.7)$$

**Demostración:**

Se sugiere al lector consultar [84, 89] para la demostración de este resultado.

□□□

El Lema 5.2 permite dar una caracterización general de todas las plantas en las cuales las restricciones estructurales impuestas sobre el controlador son heredadas directamente por el parámetro de Youla. Esta caracterización descansa en una propiedad algebraica (QI) que debe satisfacer el CRE con respecto a la planta en consideración y permite que el problema de optimización asociado a límites de desempeño puede ser planteado en forma convexa como en (5.3.6). Si bien este resultado es bastante más general que el expuesto por el Teorema 5.1<sup>1</sup>, la condición de invarianza cuadrática es bastante compleja de verificar y sólo se dispone de un *test* computacional en [62] aplicado a ciertas estructuras en particular.

Por otro lado, el resultado del Teorema 5.1 requiere que el CRE cumpla una propiedad algebraica simple (ser estructuralmente cerrado bajo inversión) y que la planta pertenezca al mismo CRE. Esto evidentemente se puede verificar de manera más directa que la condición de QI, lo cual pone de manifiesto que las condiciones del Teorema 5.1 son considerablemente más simples que la del Lema 5.2.

<sup>1</sup>En efecto, el planteamiento original en [84, 89] considera otras restricciones estructurales además de las ralas.

Para finalizar esta sección, a continuación se expone una observación adicional respecto al uso del Teorema 5.1 (que también se aplica al Lema 5.2).

**Observación 5.1 (Suficiencia del Teorema 5.1)**

*Es necesario enfatizar que la herramienta provista por el resultado del Teorema 5.1 es sólo suficiente para garantizar la convexidad del problema de optimización (5.3.3). Esto significa que no podemos asegurar que la única manera de formular el problema (5.3.3) en forma convexa es mediante el uso del Teorema 5.1.*

## 5.4. Propiedades estructurales de la solución centralizada

Así como en la sección anterior se introdujo la idea de considerar plantas con la misma estructura que el controlador, ahora es el turno de pensar en qué es lo que ocurre con la solución del problema de límite de desempeño centralizado cuando la planta tiene una estructura restringida.

De acuerdo al Lema 4.2 en la pág. 54, la solución centralizada al problema de límite de desempeño es

$$Q_{opt}(z) = (\xi_G(z)G(z))^{-1}, \quad (5.4.1)$$

donde  $G(z) \in \mathcal{RH}_\infty$  y  $\xi_G(z)$  es un GLUI de  $G(z)$ . Si la planta pertenece a una clase estructuralmente cerrada bajo inversión, entonces la estructura de  $Q_{opt}(z)$  depende de las propiedades de  $\xi_G(z)$ . Además, de acuerdo al Lema 3.1 en la pág. 34, el controlador óptimo asociado a  $Q_{opt}(z)$  está dado por

$$C_{opt}(z) = (Q_{opt}^{-1}(z) - G(z))^{-1}, \quad (5.4.2)$$

lo cual implica que la estructura del controlador óptimo  $C_{opt}(z)$  depende directamente de las propiedades estructurales de  $Q_{opt}(z)$ . Luego, se puede concluir que la estructura que posee  $C_{opt}(z)$  depende en definitiva de las propiedades estructurales del GLUI  $\xi_G(z)$ . A continuación se presentan resultados importantes en este tema.

### 5.4.1. Propiedades del interactivo unitario de ceros

#### Unicidad del GLUI

El algoritmo descrito en el Lema 2.5 en la pág. 22 no indica nada respecto de la unicidad del GLUI. El siguiente teorema garantiza que éste efectivamente es único [2]. Este resultado, si bien se aleja de la discusión actual referente a la estructura de la solución centralizada del problema de límites de desempeño, se presenta en esta sección ya que requiere de ideas que habrían sido engorrosas de introducir antes.

**Teorema 5.2 (Unicidad del GLUI)**

Si  $\mathbf{A}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$  es no singular c. e. t. p. y no tiene ceros sobre la circunferencia unitaria, entonces el interactor unitario izquierdo de ceros generalizado,  $\boldsymbol{\xi}_\mathbf{A}(z)$ , definido en el Lema 2.5 es único.

**Demostración:**

Considérese el funcional

$$J_X = \left\| (\mathbf{I} - \mathbf{A}(z)\mathbf{X}(z)) \frac{1}{z-1} \right\|_2^2, \quad (5.4.3)$$

donde  $\mathbf{X}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$ . Usando el Lema 4.2 con  $\mathbf{G}(z) = \mathbf{X}(z)$  se tiene que

$$\mathbf{X}_{opt}(z) = \arg \min_{\mathbf{X}(z) \in \mathcal{RH}_\infty} J_X \quad (5.4.4)$$

$$= (\boldsymbol{\xi}_\mathbf{A}(z)\mathbf{A}(z))^{-1}, \quad (5.4.5)$$

con  $\boldsymbol{\xi}_\mathbf{A}(z)$  un GLUI asociado a  $\mathbf{A}(z)$ . Como  $J_X$  es un funcional convexo y  $\mathcal{RH}_\infty$  es un espacio del mismo tipo, entonces la solución óptima  $\mathbf{X}_{opt}(z)$  es única [91]. Luego, si  $\boldsymbol{\xi}_1(z)$  y  $\boldsymbol{\xi}_2(z)$  son dos GLUI asociados a  $\mathbf{A}(z)$ , se debe cumplir

$$(\boldsymbol{\xi}_1(z)\mathbf{A}(z))^{-1} = (\boldsymbol{\xi}_2(z)\mathbf{A}(z))^{-1}. \quad (5.4.6)$$

Dado que las matrices involucradas en (5.4.6) son todas no singulares c. e. t. p., se tiene que  $\boldsymbol{\xi}_1(z) = \boldsymbol{\xi}_2(z)$  y en consecuencia el GLUI es único.

□□□

Este teorema complementa las propiedades ya conocidas sobre GLUI [12, 28] y permite identificar que, en base al planteamiento de Lema 2.5, éste es independiente del ordenamiento dado al conjunto de ceros de FNM de  $\mathbf{A}(z)$ .

**Diagonalidad del GLUI**

A fin de establecer condiciones bajo las cuales el GLUI de una determinada matriz de transferencia es diagonal, considérese la siguiente definición [2].

**Definición 5.2 (Cero canónico izquierdo)**

Un cero en  $z = c$  de una matriz de transferencia  $\mathbf{A}(z) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  se dice canónico izquierdo si y sólo si su multiplicidad algebraica,  $\alpha_c$ , satisface

$$\alpha_c = \sum_{j=1}^n m_j^c, \quad (5.4.7)$$

donde  $m_j^c$  se define como la multiplicidad algebraica del cero en la  $j$ -ésima fila, es decir  $m_j^c$  es tal que

$$[\mathbf{A}(z)]_{j*} = \begin{cases} (z-c)^{m_j^c} \mathbf{F}_j^c(z) & \text{si } |c| < \infty \\ \frac{1}{z^{m_j^c}} \mathbf{F}_j^c(z) & \text{si } c = \infty \end{cases}, \quad (5.4.8)$$

donde  $[\mathbf{A}(z)]_{j*}$  denota la  $j$ -ésima fila de  $\mathbf{A}(z)$  y  $0 < \|\mathbf{F}_j^c(c)^T\| < \infty$ .

La noción de cero canónico derecho puede ser definida de una manera análoga, pero considerando columnas en vez de filas. La definición anterior implica que una condición necesaria para que un cero sea canónico izquierdo (derecho) es que éste anule alguna fila (columna) de la matriz de transferencia. Esto significa que los denominados ceros *distribuidos* [6] no son canónicos izquierdos (ni derechos) por naturaleza. El concepto de cero canónico izquierdo o derecho es original de este trabajo de tesis y a modo ilustrativo se exponen algunos ejemplos.

**Ejemplo 5.1:** *Considérese las matrices de transferencia*

$$\mathbf{G}_1(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{z^2} & \frac{1}{z} \\ \frac{1}{z} & \frac{1}{z^2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_2(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{z} & 0 \\ \frac{1}{z} & \frac{1}{z^2} \end{bmatrix}, \quad (5.4.9)$$

$$\mathbf{G}_3(z) = \begin{bmatrix} \frac{z-2}{z^2} & \frac{(z-2)(z-3)}{z^3} \\ 0 & \frac{z-3}{z^2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_4(z) = \begin{bmatrix} \frac{z-2}{z^3} & 1 \\ 0 & \frac{z-3}{z} \end{bmatrix}, \quad (5.4.10)$$

cuyos conjuntos de ceros de FNM (contando multiplicidades) son respectivamente

$$\mathcal{C}_1 = \{\infty, \infty\}, \quad \mathcal{C}_2 = \{\infty, \infty, \infty\}, \quad \mathcal{C}_3 = \{\infty, \infty, 2, 3\}, \quad \mathcal{C}_4 = \{\infty, \infty, 2, 3\}. \quad (5.4.11)$$

En el caso de  $\mathbf{G}_1(z)$ , el cero en infinito es canónico izquierdo y derecho. En  $\mathbf{G}_2(z)$ , el cero en infinito no es canónico izquierdo, pero sí derecho. Para el caso de  $\mathbf{G}_3(z)$ , todos los ceros de FNM son canónicos izquierdos y derechos. En el caso de  $\mathbf{G}_4(z)$ , los ceros en infinito y en  $z = 2$  son canónicos derechos, mientras que el cero en  $z = 3$  es canónico izquierdo. ■

El siguiente teorema entrega una condición necesaria y suficiente bajo la cual el GLUI de una matriz de transferencia es diagonal [2].

**Teorema 5.3 (Condición para GLUI diagonal)**

Sea  $\mathbf{A}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$  no singular c. e. t. p. y sin ceros sobre la circunferencia unitaria. En-

tonces, el GLUI asociado a  $\mathbf{A}(z)$ ,  $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{A}}(z)$ , es diagonal si y sólo si todo cero de FNM de  $\mathbf{A}(z)$  es canónico izquierdo.

**Demostración:**

- ( $\Rightarrow$ ) Por la definición de  $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{A}}(z)$ ,

$$\mathbf{A}(z) = \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{A}}^{-1}(z) \tilde{\mathbf{A}}(z), \quad (5.4.12)$$

donde  $\tilde{\mathbf{A}}(z)$  es estable, bipropia y de FM. Luego, los ceros de FNM de  $\mathbf{A}(z)$  son los ceros de FNM de  $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{A}}^{-1}(z)$ . Como  $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{A}}^{-1}(z)$  es diagonal, entonces todos sus ceros de FNM son canónicos izquierdos (ya que todos anulan filas de  $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{A}}^{-1}(z)$ ) y se obtiene el resultado.

- ( $\Leftarrow$ ) Si todos los ceros de FNM de  $\mathbf{A}(z)$  son canónicos izquierdos, entonces por la Definición 5.2 la  $j$ -ésima fila de  $\mathbf{A}(z)$  puede expresarse como

$$[\mathbf{A}(z)]_{j*} = \left( \frac{1}{z^{m_j^\infty}} \prod_{i=1}^r (z - q_i)^{m_j^{q_i}} \right) \mathbf{F}_j(z), \quad \forall j = 1, 2, \dots, n \quad (5.4.13)$$

donde  $\{q_1, q_2, \dots, q_r\}$  es el conjunto de ceros de FNM finitos (sin contar multiplicidades) de  $\mathbf{A}(z)$ ,  $m_j^{q_i}$  ( $m_j^\infty$ ) es la multiplicidad en la fila  $j$  del cero en  $z = q_i$  ( $z = \infty$ ) tal como se define en (5.4.8), y el vector  $\mathbf{F}_j(z)$  es tal que  $\mathbf{0} < \|\mathbf{F}_j^T(c_i)\| < \infty$ ,  $\forall j = 1, 2, \dots, n$ ,  $\forall c_i$  cero de FNM de  $\mathbf{A}(z)$ . Defínase

$$\boldsymbol{\xi}(z) = \text{diag} \{ \xi_{11}(z), \xi_{22}(z), \dots, \xi_{nn}(z) \}, \quad (5.4.14)$$

con

$$\xi_{jj}(z) = z^{m_j^\infty} \prod_{i=1}^r \left( \frac{(1 - z\bar{q}_i)(1 - q_i)}{(z - q_i)(1 - \bar{q}_i)} \right)^{m_j^{q_i}}, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n. \quad (5.4.15)$$

Es evidente que  $\boldsymbol{\xi}(z)$  es de FM, unitario y tal que

$$\mathbf{0} < \|\boldsymbol{\xi}(z) \mathbf{A}(z)\|_{j*}^T(c_i) < \infty, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n. \quad (5.4.16)$$

Esto implica que el producto  $\boldsymbol{\xi}(z) \mathbf{A}(z)$  no tiene ninguno de los ceros de FNM canónicos izquierdos de  $\mathbf{A}(z)$ , pero como  $\mathbf{A}(z)$  tiene sólo ceros de FNM de esta clase,  $\boldsymbol{\xi}(z) \mathbf{A}(z)$  es estable, bipropio y FM. Se concluye así que  $\boldsymbol{\xi}(z)$  es GLUI de  $\mathbf{A}(z)$  y, por ende,  $\boldsymbol{\xi}(z) = \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{A}}(z)$ , con lo cual el resultado procede.

□□□

El Teorema 5.3 es el primer resultado en la literatura que entrega una caracterización explícita de las matrices de transferencia que poseen un GLUI diagonal. Trabajos previos que tratan el tema [29,30] sólo abordan el caso de ceros de FNM en infinito y se reducen simplemente a chequear la diagonalidad del interactor, sin proveer ninguna conexión de esto con las características dinámicas de la planta. Además, la caracterización del Teorema 5.3 tiene la ventaja de basarse en una propiedad de los ceros de FNM que es simple y se puede chequear por inspección de la matriz de transferencia. La importancia de los GLUI diagonales se relaciona con las propiedades del desacople dinámico total [31], pruebas de autocorrelación en control de varianza mínima [32] y, como se verá en la sección siguiente, con la estructura del controlador que logra el desempeño óptimo en un lazo de control MIMO con planta estructurada. Se destaca el hecho que el resultado del Teorema 5.3 se puede extender de manera directa al caso de GRUI usando la noción de ceros canónicos derechos.

Un corolario interesante que se desprende del Teorema 5.3 es el siguiente.

**Corolario 5.1 (GLUI diagonal y direcciones izquierdas de ceros)**

*Considérese  $\mathbf{A}(z)$  como en el Teorema 5.3 y defínase  $\{c_1, c_2, \dots, c_{n_c}\}$  como el conjunto de ceros de FNM de  $\mathbf{A}(z)$  (contando multiplicidades). Entonces, si todos los ceros de FNM de  $\mathbf{A}(z)$  son canónicos izquierdos, las direcciones izquierdas de éstos son elementales.*

**Demostración:**

Por la definición de GLUI se tiene que

$$\mathbf{A}(c_i) = \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{A}}^{-1}(c_i) \tilde{\mathbf{A}}(c_i) \quad (5.4.17)$$

es singular, y  $\tilde{\mathbf{A}}(c_i)$  es no singular  $\forall i = 1, 2, \dots, n_c$ . Si todo cero de FNM de  $\mathbf{A}(z)$  es canónico izquierdo entonces por el Teorema 5.3  $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{A}}(z)$  es diagonal y, dada (5.4.17), esto implica que existe una base elemental para el espacio nulo izquierdo de  $\mathbf{A}(c_i)$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, n_c$ . Esto significa, a su vez, que las direcciones izquierdas de todos los ceros de FNM son elementales.

□□□

El corolario anterior debe ser tomado con precaución, ya que establece sólo una condición suficiente para que las direcciones izquierdas de los ceros de FNM de  $\mathbf{A}(z)$  sean elementales. El próximo ejemplo aclara este punto.

**Ejemplo 5.2:** *Considérese la matriz de transferencia*

$$\mathbf{A}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{(z-2)}{z^2} & \frac{(z-2)^2}{z^2} \end{bmatrix} \quad (5.4.18)$$

$\mathbf{A}(z)$  posee dos ceros de FNM en  $z = 2$ , ambos con dirección elemental  $\boldsymbol{\eta} = [0 \ 1]^T$ . No obstante, el lector puede chequear que sólo uno de los ceros en  $z = 2$  es canónico izquierdo y, en consecuencia, el GLUI no es diagonal. ■

Para finalizar esta sección, a continuación se presenta un resultado técnico que se relaciona con la forma en que se construye el GLUI y que será de gran importancia en el capítulo siguiente.

**Lema 5.3 (Ceros canónicos izquierdos y construcción del GLUI)**

Sea  $\mathbf{A}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$  no singular c. e. t. p., sin ceros sobre la circunferencia unitaria y con un conjunto de ceros de FNM (contando multiplicidades)  $\mathcal{C}$ . Considérese los vectores  $\boldsymbol{\eta}_i$  en el algoritmo para la construcción de GLUI del Lema 2.5 en la pág. 22 con el ordenamiento de ceros definido por  $\mathcal{C}$ . Entonces, si los primeros  $n_{c_{lc}}$  ceros en  $\mathcal{C}$  son canónicos izquierdos,  $\boldsymbol{\eta}_i$  es elemental  $\forall i = 1, 2, \dots, n_{c_{lc}}$ .

**Demostración:**

La demostración procede de manera inductiva en base al algoritmo para construir GLUI. Consideremos la factorización del primer cero en  $\mathcal{C}$ . Si el cero canónico izquierdo en  $z = c_1$  anula la  $j$ -ésima fila de  $\mathbf{A}(z)$ , entonces se cumple

$$[\mathbf{A}(c_1)]_{j*} = \mathbf{0}, \quad (5.4.19)$$

lo cual implica que el vector  $\boldsymbol{\eta}_1$  que satisface

$$\boldsymbol{\eta}_1 \mathbf{A}(c_1) = \mathbf{0}, \quad (5.4.20)$$

es el  $j$ -ésimo elemento de la base elemental de  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , es decir,  $\boldsymbol{\eta}_1 = \mathbf{e}_j^n$ . Luego, el factor unitario

$$\mathbf{L}_1(z) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_1 & \mathbf{U}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(z) & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_1^H \\ \mathbf{U}_1^H \end{bmatrix}, \quad (5.4.21)$$

con  $f_1(z)$  definido en (2.4.14), es diagonal ya que  $[\boldsymbol{\eta}_1 \ \mathbf{U}_1]$  es una matriz de permutación.

Consideremos ahora la factorización del cero en  $z = c_2$ . Siguiendo los pasos del algoritmo descrito en el Lema 2.5 se tiene que la matriz  $(\mathbf{L}_1(z)\mathbf{A}(z))|_{z=c_2}$  tiene alguna fila idénticamente nula. Luego, por un argumento similar al caso anterior, se tiene que  $\boldsymbol{\eta}_2$  es un vector elemental. Si se sigue este procedimiento hasta el cero en  $z = c_{n_{lc}}$  se obtiene el resultado buscado.

□□□

### 5.4.2. Estructura de la solución centralizada

Con los resultados de la sección anterior en mente, se puede ahora enunciar un resultado importante relativo a la estructura del controlador óptimo centralizado que provee el mejor desempeño alcanzable cuando la planta es estructurada [2].

#### Teorema 5.4 (Propiedades estructurales del controlador óptimo centralizado)

Considérese el problema de límite de desempeño con control centralizado del Lema 4.2 en la pág. 54 y su solución dada por el controlador óptimo  $\mathbf{C}_{opt}(z)$  en (5.4.2). Entonces:

- (a) Si  $\mathbf{G}(z) \in \mathcal{RH}_2 \cap \mathcal{S}_d$ , entonces  $\mathbf{C}_{opt}(z) \in \mathcal{S}_d$ .
- (b) Si  $\mathbf{G}(z) \in \mathcal{RH}_2 \cap \mathcal{S}_t$ , entonces  $\mathbf{C}_{opt}(z) \in \mathcal{S}_t$  si y sólo si todos los ceros de FNM de  $\mathbf{G}(z)$  son canónicos izquierdos.
- (c) En el caso de estructura rala simple, el punto anterior puede ser particularizado más aún. Si  $\mathbf{G}(z) \in \mathcal{RH}_2 \cap \mathcal{S}_1$ , entonces  $\mathbf{C}_{opt}(z) \in \mathcal{S}_1$  si y sólo si  $\mathbf{G}(z)$  no tiene ceros de FNM que son ceros de  $G_{kk}(z)$  con una multiplicidad algebraica mayor a la del mismo cero en  $G_{k\ell}(z)$ .

#### Demostración:

- (a) Inmediata en base al hecho que el GLUI asociado a una matriz diagonal por bloques, tiene la misma estructura (con las mismas dimensiones por bloque).
- (b)
  - ( $\Leftarrow$ ) A partir del Teorema 5.3 se tiene que si todo cero de FNM de  $\mathbf{G}(z)$  es canónico izquierdo, entonces  $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{G}}(z)$  es diagonal. Usando (5.4.1) se tiene que, como  $\mathbf{G}(z) \in \mathcal{S}_t$  y  $\mathcal{S}_t$  es estructuralmente cerrado bajo inversión,  $\mathbf{Q}_{opt}(z) \in \mathcal{S}_t$ . Esto último junto con (5.4.2) implican que  $\mathbf{C}_{opt}(z) \in \mathcal{S}_t$ .
  - ( $\Rightarrow$ ) El Teorema 5.1 implica que  $\mathbf{Q}_{opt}(z) \in \mathcal{S}_t$ . Como  $\mathcal{S}_t$  estructuralmente cerrado bajo inversión y  $\mathbf{G}(z) \in \mathcal{S}_t$ , se tiene que  $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{G}}(z) \in \mathcal{S}_t$  (es decir, el GLUI es triangular). Por otro lado, las únicas matrices triangulares unitarias son aquellas diagonales, por lo que  $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{G}}(z) \in \mathcal{S}_d$  y, con el Teorema 5.3, se concluye que todo cero de FNM de  $\mathbf{G}(z)$  es canónico izquierdo.
- (c) Directa de la parte anterior y considerando que los únicos ceros de FNM de  $\mathbf{G}(z) \in \mathcal{S}_1$  que no son canónicos izquierdos, son aquellos que son ceros de  $G_{kk}(z)$  con multiplicidad algebraica mayor que la del mismo cero en  $G_{k\ell}(z)$ .

□□□

La primera parte del Teorema anterior es muy simple y, en realidad, son los puntos (b) y (c) los más relevantes. Estos resultados indican que si la planta es estructurada, entonces

las propiedades de sus ceros de FNM (esto es, su porción no invertible) son cruciales en la estructura del controlador óptimo. En efecto, si la planta posee ceros de FNM que son suficientemente *simples* (o más preciso, si son todos canónicos izquierdos), entonces el flujo de información entre las entradas y salidas de la planta es preservado en forma natural bajo la ley de realimentación óptima. Más aún, esto significa que si se desea restringir la estructura del controlador a la misma de la planta y ésta posee sólo ceros de FNM canónicos izquierdos, entonces *la restricción estructural no afecta al desempeño óptimo*. Este fenómeno es de gran importancia y constituye una de los resultados principales de este trabajo.

Para el caso de ceros de FNM en infinito, estos resultados tienen una interpretación clara. Para ilustrar esta idea, considérese

$$\mathbf{G}(z) = \begin{bmatrix} z^{-1} & 0 \\ z^{-x} & z^{-2} \end{bmatrix} \in \mathcal{S}_t. \quad (5.4.22)$$

Es claro que si  $x \geq 2$ , todos los ceros de FNM de  $\mathbf{G}(z)$  son canónicos izquierdos y por ende  $\mathbf{C}_{opt}(z)$  en (5.4.2) es de tipo  $\mathcal{S}_t$ . Del mismo modo, si  $0 \leq x < 2$ , entonces  $\mathbf{C}_{opt}(z)$  es un controlador centralizado. En efecto, consideremos un controlador triangular de la forma

$$\mathbf{C}_t(z) = \begin{bmatrix} C_{11}(z) & 0 \\ C_{21}(z) & C_{22}(z) \end{bmatrix}, \quad (5.4.23)$$

el cual de origen a

$$\begin{bmatrix} Y_1(z) \\ Y_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^{-1}C_{11}(z) & 0 \\ z^{-2}C_{21}(z) + z^{-x}C_{11}(z) & z^{-2}C_{22}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(z) \\ E_2(z) \end{bmatrix}, \quad (5.4.24)$$

donde  $\mathbf{E}(z) = [E_1(z) \ E_2(z)]^T = \mathcal{Z}\{\mathbf{e}(t)\}$  e  $\mathbf{Y}(z) = [Y_1(z) \ Y_2(z)]^T = \mathcal{Z}\{\mathbf{y}(t)\}$ . Por otro lado, considérese un controlador centralizado

$$\mathbf{C}(z) = \begin{bmatrix} C_{11}(z) & C_{12}(z) \\ C_{21}(z) & C_{22}(z) \end{bmatrix}, \quad (5.4.25)$$

que da origen a

$$\begin{bmatrix} Y_1(z) \\ Y_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^{-1}C_{11}(z) & z^{-1}C_{12}(z) \\ z^{-2}C_{21}(z) + z^{-x}C_{11}(z) & z^{-2}C_{22}(z) + z^{-x}C_{12}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(z) \\ E_2(z) \end{bmatrix}. \quad (5.4.26)$$

Por inspección de (5.4.24) y (5.4.26) se puede notar que, bajo el criterio de mantener mínimo el retardo entre la señal de error y la salida, el único caso en que elegir  $C_{12}(z) \neq 0$  es ventajoso es cuando  $x < 2$ . Si  $x \geq 2$  entonces, independientemente de  $C_{12}(z)$ , el retardo mínimo entre  $e(t)$  e  $y(t)$  está fijo y la elección natural es  $C_{12}(z) = 0$ . Se puede apreciar que esto es coherente con las condiciones que garantizan que el controlador óptimo  $C_{opt}(z)$  es triangular.

## 5.5. Conclusiones

La motivación para restringir la estructura de un controlador MIMO pasa normalmente por razones tecnológicas y/o porque la estructura de la planta induce un determinado flujo de información en el modo como se procesan las variables sensadas para generar las señales de actuación sobre el proceso.

Es natural pensar que, a medida que la estructura del control es más simple, el desempeño óptimo alcanzable debe verse afectado. Esto motiva el cómputo de los límites de desempeño de lazos de control MIMO cuando se imponen restricciones estructurales sobre el controlador. La principal dificultad de este planteamiento radica en que el problema de optimización asociado es, en general, no convexo, con lo cual su resolución explícita se complica considerablemente. No obstante, si el CRE posee la propiedad de ser *estructuralmente cerrado bajo inversión* y la planta tiene la misma estructura que éste, entonces el problema de optimización cuadrática es convexo y puede ser resuelto con herramientas estándar. Este resultado aventaja a otro existente en la literatura gracias a la notoria simplicidad en las condiciones que garantizan la convexidad del problema.

Por otro lado, si la planta es estructurada y pertenece a un CRE estructuralmente cerrado bajo inversión, entonces existen condiciones bajo las cuales la solución óptima del problema no restringido del capítulo anterior posee dicha estructura *per se*. En particular, se entrega una caracterización simple de las plantas en las que este fenómeno ocurre, la cual depende de la diagonalidad del GLUI asociado. Los resultados indican que si los ceros de FNM de la planta tienen la propiedad de ser *canónicos izquierdos*, entonces el GLUI es diagonal. Este resultado, junto con la demostración de la unicidad del GLUI, es original dentro de la literatura actual y complementa las propiedades ya conocidas de este tipo de interactores. Finalmente, poder identificar cuándo el GLUI de una planta es diagonal es de gran importancia conceptual, ya que en definitiva implica que si dicha planta es restringida en estructura, imponer las mismas restricciones estructurales sobre el control no tiene ningún efecto desde el punto de vista del mejor desempeño alcanzable.

# LÍMITES DE DESEMPEÑO EN CONTROL RESTRINGIDO

### 6.1. Introducción

Este capítulo trata sobre el cómputo explícito de los límites de desempeño en el control con estructura restringida para los casos de interés en esta tesis ( $\mathcal{S}_d$ ,  $\mathcal{S}_1$  y  $\mathcal{S}_t$ ). Los resultados se basan en aquellos de [3] y corresponden a una de las contribuciones de mayor importancia de este trabajo.

Los únicos resultados reportados en la literatura respecto de límites de desempeño considerando restricciones estructurales en el controlador se encuentran en [47]. En dicho trabajo, el autor establece un procedimiento numérico para obtener el mejor desempeño alcanzable en el contexto de varianza mínima para el caso de control descentralizado y suponiendo que se tiene estabilidad en el lazo. La naturaleza numérica de dichos resultados, al contrario de los expuestos en este capítulo, no revela cuáles son los rasgos dinámicos que tienen un efecto significativo sobre el desempeño óptimo.

El desarrollo de los contenidos de este capítulo se inscribe dentro del marco de trabajo definido por los resultados del capítulo anterior, es decir, a fin de garantizar un problema de optimización convexo, se supone que la planta posee la misma estructura que el controlador. Además, en el capítulo anterior se concluyó que si todos los ceros de FNM de la planta tienen la propiedad de ser canónicos izquierdos, entonces restringir la estructura del controlador tiene un impacto nulo sobre el mejor desempeño alcanzable. De esta forma, el resultado fundamental de este capítulo es justamente cuantificar de manera explícita el desempeño óptimo y el controlador que lo logra cuando los ceros de FNM de la planta no tienen necesariamente dicha propiedad.

## 6.2. Estructura diagonal por bloques

Si la planta es tal que  $\mathbf{G}(z) \in \mathcal{RH}_2 \cap \mathcal{S}_d$ , entonces la parte (a) del Teorema 5.4 en la pág. 70 indica que el controlador óptimo sin restricción estructural  $\mathbf{C}_{opt}(z) \in \mathcal{S}_d$ . Esto implica que en este caso no existe deterioro en el desempeño óptimo por el hecho de restringir la estructura del controlador a una del tipo  $\mathcal{S}_d$ . Luego, el mejor desempeño alcanzable y el controlador óptimos están dados por los resultados de Lema 4.2 en la pág. 54.

## 6.3. Estructura rala simple

En esta sección se considera el caso en que tanto la planta como el controlador son de la clase  $\mathcal{S}_1$ . Esta estructura es un caso particular de la dada por  $\mathcal{S}_t$  en la sección siguiente. No obstante, se incluye en forma separada ya que su simplicidad por sobre el caso triangular entrega una visión más intuitiva sobre la naturaleza de los resultados. Además, debe servir como preámbulo a los resultados para el caso  $\mathcal{S}_t$ , que ciertamente tienen un grado de tecnicismos que pueden oscurecer los aspectos conceptuales importantes. Para facilitar la exposición de los contenidos, defínase

$$J_{1\ opt} = \min_{\mathbf{Q}(z) \in \mathcal{RH}_\infty \cap \mathcal{S}_1} J, \quad (6.3.1)$$

$$\mathbf{Q}_{1\ opt}(z) = \arg \min_{\mathbf{Q}(z) \in \mathcal{RH}_\infty \cap \mathcal{S}_1} J, \quad (6.3.2)$$

es decir,  $J_{1\ opt}$  es el mejor desempeño alcanzable en un lazo con planta y controlador de tipo  $\mathcal{S}_1$  y  $\mathbf{Q}_{1\ opt}(z)$  es el parámetro de Youla asociado al controlador óptimo que consigue dicho desempeño. El próximo teorema entrega la solución explícita para el problema de interés.

### Teorema 6.1 (Límite de desempeño en caso ralo simple)

Considérese  $\mathbf{G}(z) \in \mathcal{RH}_2 \cap \mathcal{S}_1$  no singular c. e. t. p. y sin ceros sobre la circunferencia unitaria. Entonces,

(a) El parámetro de Youla óptimo  $\mathbf{Q}_{1\ opt}(z)$  es

$$\mathbf{Q}_{1\ opt}(z) = \text{diag} \{ [\mathbf{Q}_{1\ opt}(z)]_{11}, [\mathbf{Q}_{1\ opt}(z)]_{22}, \dots, [\mathbf{Q}_{1\ opt}(z)]_{nn} \} + \quad (6.3.3)$$

$$+ [\mathbf{Q}_{1\ opt}(z)]_{k\ell} \mathbf{1}_{k\ell}, \quad 1 \leq k \leq n, 1 \leq \ell \leq n, \quad (6.3.4)$$

donde

$$[\mathbf{Q}_{1 \text{ opt}}(z)]_{ii} = \begin{cases} (\xi_{G_{ii}}(z)G_{ii}(z))^{-1} & \text{si } i \neq \ell \\ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n [\mathbf{Q}_{\text{opt}}(z)]_{\ell j} & \text{si } i = \ell \end{cases}, \quad (6.3.5)$$

$$[\mathbf{Q}_{1 \text{ opt}}(z)]_{k\ell} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n [\mathbf{Q}_{\text{opt}}(z)]_{kj}, \quad (6.3.6)$$

con  $\xi_{G_{ii}}(z)$  GLUI de  $G_{ii}(z)$ ,  $\mathbf{Q}_{\text{opt}}(z) = (\xi_{\mathbf{G}}(z)\mathbf{G}(z))^{-1}$ ,  $\xi_{\mathbf{G}}(z)$  es un GLUI de  $\mathbf{G}(z)$  y la matriz  $\mathbf{1}_{k\ell} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  es tal que tiene todos sus elementos nulos salvo el elemento  $(k, \ell)$ , en el cual tiene un uno.

(b) Defínase la matriz  $2 \times 2$

$$\hat{\mathbf{G}}(z) = \begin{bmatrix} G_{\ell\ell}(z) & 0 \\ G_{k\ell}(z) & G_{kk}(z) \end{bmatrix} \in \mathcal{RL}_2, \quad (6.3.7)$$

y el conjunto ordenado de ceros de FNM (contando multiplicidades) de  $\hat{\mathbf{G}}(z)$  como

$$\hat{\mathcal{C}} = \{\hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots, \hat{c}_{\hat{n}_c}\} \quad (6.3.8)$$

$$= \mathcal{C}^{\ell\ell} \cup \{\hat{c}_{n_c^{\ell\ell}+1}, \dots, \hat{c}_{n_c^{\ell\ell}+n_{c_{k\ell}}}, \hat{c}_{n_c^{\ell\ell}+n_{c_{k\ell}}+1}, \dots, \hat{c}_{n_c^{\ell\ell}+n_{c_{k\ell}}+n_{c_{k\bar{\ell}}}}\}, \quad (6.3.9)$$

donde se considera que el operador unión preserva el ordenamiento y el conjunto  $\mathcal{C}^{\ell\ell} \subseteq \hat{\mathcal{C}}$  es tal que contiene los  $n_c^{\ell\ell}$  ceros de FNM de  $\hat{\mathbf{G}}(z)$  que también son ceros de FNM de  $G_{\ell\ell}(z)$  ordenados de un modo tal que  $|\hat{c}_i| < \infty$  para  $i = 1, 2, \dots, r^{\ell\ell}$ , y  $r^{\ell\ell}$  denota el número de ceros de FNM finitos en  $\mathcal{C}^{\ell\ell}$ ;  $n_{c_{k\ell}}$  es el número de ceros de FNM de  $G_{k\ell}(z)$  que son simultáneamente ceros de FNM de  $G_{k\ell}(z)$ ,  $n_{c_{k\bar{\ell}}}$  es el número de ceros de FNM de  $G_{kk}(z)$  que no son ceros de FNM de  $G_{k\ell}(z)$ .

Entonces, el desempeño óptimo  $J_{1 \text{ opt}}$  es

$$J_{1 \text{ opt}} = J_{\text{opt}} + \sum_{i=n_c^{\ell\ell}+n_{c_{k\ell}}+1}^{\hat{n}_c} h(\hat{c}_i) \left| \hat{\boldsymbol{\eta}}_i^H \mathbf{e}_1^2 \right|^2, \quad (6.3.10)$$

donde  $J_{\text{opt}}$  es el desempeño óptimo sin restricción estructural en (4.3.15) en la pág. 55

y

$$h(c_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } c_i = \infty \\ \frac{|c_i|^2 - 1}{|1 - c_i|^2} & \text{si } |c_i| < \infty \end{cases}. \quad (6.3.11)$$

Las direcciones  $\hat{\boldsymbol{\eta}}_i$  se definen como en (2.4.14) en la pág. 22 con  $\mathbf{A}(z) = \hat{\mathbf{G}}(z)$  y  $\mathbf{e}_i^n$  es el  $i$ -ésimo vector de la base elemental de  $\mathbb{R}^n$ .

**Demostración:**

- (a) Mediante el uso de la propiedad (A.3.8) de la norma 2, el funcional  $J$  puede expresarse como

$$J = \left\| \frac{\mathbf{b} - \mathbf{G}_{\mathbf{A}}(z)\mathbf{Q}_{\text{vec}}(z)}{z - 1} \right\|_2^2 \quad (6.3.12)$$

donde  $\mathbf{Q}_{\text{vec}}(z) \in \mathbb{C}^{(n+1) \times 1}$  y  $\mathbf{G}_{\mathbf{A}}(z) \in \mathbb{C}^{(n+1) \times (n+1)}$  son

$$\mathbf{Q}_{\text{vec}}(z) = \left[ Q_{11}(z) \quad \cdots \quad Q_{k-1,k-1}(z) \quad Q_{k\ell}(z) \quad Q_{k+1,k+1}(z) \quad \cdots \quad Q_{nn}(z) \quad Q_{kk}(z) \right]^T \quad (6.3.13)$$

$$\mathbf{G}_{\mathbf{A}}(z) = \text{diag} \{ \mathbf{G}(z), G_{kk}(z) \}, \quad (6.3.14)$$

y  $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^{(n+1) \times 1}$  es tal que

$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq k \\ 0 & \text{si } i = k \end{cases}. \quad (6.3.15)$$

Dado que la matriz aumentada  $\mathbf{G}_{\mathbf{A}}(z)$  es diagonal por bloques, entonces la matriz

$$\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{G}_{\mathbf{A}}}(z) = \text{diag} \{ \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{G}}(z), \xi_{G_{kk}}(z) \} \quad (6.3.16)$$

es un GLUI asociado a  $\mathbf{G}_{\mathbf{A}}(z)$ . Si se introduce este GLUI en (6.3.12) el funcional resulta

$$J = \left\| \frac{\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{G}_{\mathbf{A}}}(z)\mathbf{b} - \tilde{\mathbf{G}}_{\mathbf{A}}(z)\mathbf{Q}_{\text{vec}}(z)}{z - 1} \right\|_2^2, \quad (6.3.17)$$

donde  $\tilde{\mathbf{G}}_{\mathbf{A}}(z) = \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{G}_{\mathbf{A}}}(z)\mathbf{G}_{\mathbf{A}}(z)$ . Una descomposición ortogonal de la forma (2.3.1) en la pág. 16 aplicada a la última expresión da origen a

$$J = \left\| \underbrace{\frac{\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{G}_{\mathbf{A}}}(z)\mathbf{b} - \mathbf{b}}{z - 1}}_{\in \mathcal{RH}_2^\perp} + \underbrace{\frac{\mathbf{b} - \tilde{\mathbf{G}}_{\mathbf{A}}(z)\mathbf{Q}_{vec}(z)}{z - 1}}_{\in \mathcal{RH}_2} \right\|_2^2 \quad (6.3.18)$$

$$= \left\| \frac{\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{G}_{\mathbf{A}}}(z) - \mathbf{I}}{z - 1} \mathbf{b} \right\|_2^2 + \left\| \frac{\mathbf{b} - \tilde{\mathbf{G}}_{\mathbf{A}}(z)\mathbf{Q}_{vec}(z)}{z - 1} \right\|_2^2. \quad (6.3.19)$$

Luego, el vector óptimo  $\mathbf{Q}_{vec\ opt}(z)$  que minimiza a  $J$  es tal que minimiza el segundo sumando de (6.3.19), es decir

$$\mathbf{Q}_{vec\ opt}(z) = \arg \min_{\mathbf{Q}_{vec}(z) \in \mathcal{RH}_\infty} J \quad (6.3.20)$$

$$= \tilde{\mathbf{G}}_{\mathbf{A}}(z)^{-1} \mathbf{b}. \quad (6.3.21)$$

Dado que  $\tilde{\mathbf{G}}_{\mathbf{A}}(z)$  es bipropio y de FM, entonces  $\tilde{\mathbf{G}}_{\mathbf{A}}(z)^{-1} \in \mathcal{RH}_\infty$ . Esta elección para  $\mathbf{Q}_{vec\ opt}(z)$  anula el segundo sumando de (6.3.19) y, como  $\tilde{\mathbf{G}}_{\mathbf{A}}(1)\mathbf{Q}_{vec\ opt}(1) = \mathbf{b}$ , garantiza que la norma está bien definida.

Gracias a la definición de  $\mathbf{b}$  junto con (6.3.16) y la solución óptima no restringida  $\mathbf{Q}_{opt}(z)$  dada en el Lema 4.2 en la pág. 54, los elementos de  $\mathbf{Q}_{vec\ opt}(z)$  son

$$[\mathbf{Q}_{1\ opt}(z)]_{ii} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n [\mathbf{Q}_{opt}(z)]_{ij}, \quad i = 1, \dots, n, i \neq k, \quad (6.3.22)$$

$$[\mathbf{Q}_{1\ opt}(z)]_{kk} = (\boldsymbol{\xi}_{G_{kk}}(z)G_{kk}(z))^{-1}, \quad (6.3.23)$$

$$[\mathbf{Q}_{1\ opt}(z)]_{k\ell} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n [\mathbf{Q}_{opt}(z)]_{kj}. \quad (6.3.24)$$

Se puede obtener una caracterización más precisa de  $[\mathbf{Q}_{1\ opt}(z)]_{ii}$  si, usando la propiedad (A.3.8), se escribe el funcional como

$$J = \underbrace{\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \ell}}^n \left\| \frac{1 - G_{ii}(z)Q_{ii}(z)}{z - 1} \right\|_2^2}_{J'} + \underbrace{\left\| \frac{e_1^2 - \hat{\mathbf{G}}(z) \begin{bmatrix} Q_{\ell\ell}(z) \\ Q_{k\ell}(z) \end{bmatrix}}{z - 1} \right\|_2^2}_{J''}, \quad (6.3.25)$$

donde  $\hat{\mathbf{G}}(z)$  se define como en (6.3.7). En efecto, usando la parte (b) del Lema 4.2 para

el término  $J'$  en (6.3.25) se tiene que

$$[\mathbf{Q}_{1\text{ opt}}(z)]_{ii} = (\xi_{G_{ii}}(z)G_{ii}(z))^{-1}, \quad i = 1, \dots, n, i \neq \ell, \quad (6.3.26)$$

con lo cual se obtiene el resultado buscado.

- (b) El valor mínimo de  $J'$ ,  $J'_{\text{opt}}$ , se puede obtener directamente de la parte (b) de Lema 4.2 como

$$J'_{\text{opt}} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \ell}}^n \left( d^{ii} + \sum_{j=1}^{r^{ii}} \frac{|q_j^{ii}|^2 - 1}{|1 - q_j^{ii}|^2} \right), \quad (6.3.27)$$

donde  $d^{ii}$  es el número de ceros en infinito de  $G_{ii}(z)$  y  $\{q_1^{ii}, q_2^{ii}, \dots, q_{r^{ii}}^{ii}\}$  es el conjunto de ceros de FNM finitos de  $G_{ii}(z)$ .

De manera similar, el costo óptimo correspondiente a  $J''$  se puede calcular a partir de la parte (b) del Lema 4.1 en la pág. 53 con  $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1^2$  como

$$J''_{\text{opt}} = \sum_{i=1}^{\hat{n}_c} h(\hat{c}_i) \left| \hat{\boldsymbol{\eta}}_i^H \mathbf{e}_1^2 \right|^2, \quad (6.3.28)$$

donde el conjunto ordenado de ceros de FNM de  $\hat{\mathbf{G}}(z)$  se define en (6.3.9). Notando que los primeros  $n_c^{\ell\ell} + n_{c\,k\ell}$  ceros de FNM en  $\hat{\mathcal{C}}$  son canónicos izquierdos, por el Lema 5.3 en la pág. 69 se concluye que  $\hat{\boldsymbol{\eta}}_i = \mathbf{e}_1^2$  para  $i = 1, \dots, n_c^{\ell\ell}$  y que  $\hat{\boldsymbol{\eta}}_i = \mathbf{e}_2^2$  para  $i = n_c^{\ell\ell} + 1, \dots, n_c^{\ell\ell} + n_{c\,k\ell}$ . De este modo resulta

$$J''_{\text{opt}} = \sum_{i=1}^{n_c^{\ell\ell}} h(\hat{c}_i) + \underbrace{\sum_{i=n_c^{\ell\ell}+1}^{n_c^{\ell\ell}+n_{c\,k\ell}} h(\hat{c}_i) \left| \hat{\boldsymbol{\eta}}_i^H \mathbf{e}_1^2 \right|^2}_{=0} + \sum_{i=n_c^{\ell\ell}+n_{c\,k\ell}+1}^{\hat{n}_c} h(\hat{c}_i) \left| \hat{\boldsymbol{\eta}}_i^H \mathbf{e}_1^2 \right|^2. \quad (6.3.29)$$

Luego, si se reemplaza (6.3.27) y (6.3.29) en  $J_{1\text{ opt}} = J'_{\text{opt}} + J''_{\text{opt}}$ , el costo óptimo puede ser expresado de una manera tal que se reconoce el desempeño óptimo no restringido  $J_{\text{opt}}$  en (4.3.15) como

$$J_{1\text{ opt}} = \underbrace{\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \ell}}^n \left( d^{ii} + \sum_{j=1}^{r^{ii}} \frac{|q_j^{ii}|^2 - 1}{|1 - q_j^{ii}|^2} \right)}_{J_{\text{opt}}} + d^{\ell\ell} + \sum_{i=1}^{r^{\ell\ell}} \frac{|q_i^{\ell\ell}|^2 - 1}{|1 - q_i^{\ell\ell}|^2} + \sum_{i=n_c^{\ell\ell}+n_{c\,k\ell}+1}^{\hat{n}_c} h(\hat{c}_i) \left| \hat{\boldsymbol{\eta}}_i^H \mathbf{e}_1^2 \right|^2. \quad (6.3.30)$$

□□□

El resultado del teorema anterior permite calcular el controlador tipo  $\mathcal{S}_1$  óptimo para una planta del mismo tipo dada mediante la expresión (6.3.4). Esta relación es particularmente simple ya que  $\mathbf{Q}_{1\text{opt}}(z)$  se expresa en términos de la solución óptima sin restricción estructural  $\mathbf{Q}_{\text{opt}}(z)$ . Para aclarar esta idea, en el siguiente ejemplo se computa el parámetro de Youla ralo simple que logra el desempeño óptimo para una planta rala simple  $4 \times 4$ .

**Ejemplo 6.1:** *Considérese el sistema descrito por su matriz de transferencia*

$$\mathbf{G}(z) = \begin{bmatrix} G_{11}(z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_{22}(z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{33}(z) & 0 \\ 0 & G_{42}(z) & 0 & G_{44}(z) \end{bmatrix} \in \mathcal{S}_1. \quad (6.3.31)$$

Supóngase que se calcula el óptimo no restringido usando (4.3.13) de modo tal que su elemento  $(i, j)$  se denota por  $Q_{ij}(z)$ . Entonces, en este caso  $k = 4$ ,  $\ell = 2$  y de acuerdo a la parte (a) del Teorema 6.1 el parámetro de Youla restringido en estructura óptimo es

$$\mathbf{Q}_{1\text{opt}}(z) = \begin{bmatrix} (\xi_{G_{11}}(z)G_{11}(z))^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{22}^1(z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\xi_{G_{33}}(z)G_{33}(z))^{-1} & 0 \\ 0 & Q_{42}^1(z) & 0 & (\xi_{G_{44}}(z)G_{44}(z))^{-1} \end{bmatrix}, \quad (6.3.32)$$

donde

$$Q_{22}^1(z) = Q_{21}(z) + Q_{22}(z) + Q_{23}(z), \quad (6.3.33)$$

$$Q_{42}^1(z) = Q_{41}(z) + Q_{42}(z) + Q_{43}(z). \quad (6.3.34)$$

■

Por otro lado, la parte (b) del Teorema 6.1 entrega una forma explícita para el valor óptimo de  $J$  cuando  $\mathbf{G}(z) \in \mathcal{S}_1$  y  $\mathbf{Q}(z) \in \mathcal{S}_1$ , es decir, provee una expresión analítica para el mejor desempeño  $J$  alcanzable en el control ralo simple con integración<sup>1</sup> de una planta rala simple estable. Tal como se aprecia en (6.3.10), dicho límite de desempeño depende de los ceros de FNM de la matriz  $\hat{\mathbf{G}}(z)$ . No obstante, como todo cero de FNM de  $\hat{\mathbf{G}}(z)$  es también cero de FNM de  $\mathbf{G}(z)$ , esto significa que en (6.3.10) los ceros de FNM de la planta que son cercanos a  $z = 1$  son los más dañinos en términos del desempeño óptimo alcanzable. Esto es coherente con resultados previos [11–13] que no consideran restricciones estructurales y, para dar una discusión más acabada sobre este hecho, el próximo corolario enuncia algunas consecuencias

<sup>1</sup>El controlador tiene integración en forma garantizada ya que  $\mathbf{Q}_{1\text{opt}}(1) = \mathbf{G}^{-1}(1)$ .

inmediatas del Teorema 6.1.

**Corolario 6.1 (Deterioro en desempeño para caso ralo simple)**

Considérese  $\mathbf{G}(z) \in \mathcal{RH}_2 \cap \mathcal{S}_1$  no singular c. e. t. p., sin ceros sobre la circunferencia unitaria y la notación y resultados del Teorema 6.1. Entonces:

(a) El costo extra que se origina por el hecho de forzar  $\mathbf{C}(z) \in \mathcal{S}_1$  es

$$\begin{aligned} \Delta J_1 &= J_{1\text{opt}} - J_{\text{opt}} \\ &= \sum_{i=n_c^{\ell\ell}+n_{c\ k\ell}+1}^{\hat{n}_c} h(\hat{c}_i) \left| \hat{\boldsymbol{\eta}}_i^H \mathbf{e}_1^2 \right|^2. \end{aligned} \quad (6.3.35)$$

(b)  $\Delta J_1 = 0$  si y sólo si todo cero de FNM de  $\mathbf{G}(z)$  es canónico izquierdo.

(c) Si  $n_{c\ \bar{k}\ell} = 1$ , entonces

$$\Delta J_1 = h(\hat{c}_{\hat{n}_c}) \beta(\hat{c}_{\hat{n}_c}), \quad (6.3.36)$$

donde

$$\beta(z) = \frac{\left| \frac{\tilde{G}_{k\ell}(z)}{\tilde{G}_{\ell\ell}(z)} \right|^2}{1 + \left| \frac{\tilde{G}_{k\ell}(z)}{\tilde{G}_{\ell\ell}(z)} \right|^2}, \quad (6.3.37)$$

con

$$\tilde{G}_{\ell\ell}(z) = \xi_{G_{\ell\ell}}(z) G_{\ell\ell}(z), \quad (6.3.38)$$

$$\tilde{G}_{k\ell}(z) = \xi_{G_{k\ell}}^{nk\ell}(z) G_{k\ell}(z), \quad (6.3.39)$$

donde  $\xi_{G_{k\ell}}^{nk\ell}(z)$  es un LUI para  $G_{k\ell}(z)$  asociado a aquellos ceros de FNM de  $G_{k\ell}(z)$  que también son ceros de  $G_{k\bar{k}}(z)$ .

**Demostración:**

(a) Directa del Teorema 6.1.

- (b)
- ( $\Leftarrow$ ) Si todos los ceros de FNM de  $\mathbf{G}(z)$  son canónicos izquierdos, entonces  $n_{c\ \bar{k}\ell} = 0$  en el Teorema 6.1 y por ende  $\hat{n}_c = n_c^{\ell\ell} + n_{c\ k\ell}$ . Esto implica que la suma en (6.3.35) no contiene términos y en consecuencia  $\Delta J_1 = 0$ .
  - ( $\Rightarrow$ ) Si  $\Delta J_1 = 0$  entonces  $\hat{\boldsymbol{\eta}}_i = \mathbf{e}_2^2 = [0 \ 1]^T$ ,  $\forall i = n_c^{\ell\ell} + n_{c\ k\ell} + 1, n_c^{\ell\ell} + n_{c\ k\ell} +$

$2, \dots, \hat{n}_c$ . Defínase la matriz diagonal

$$\hat{\mathbf{L}}_i(z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{(1 - z\bar{\hat{c}}_i)(1 - \hat{c}_i)}{(z - \hat{c}_i)(1 - \bar{\hat{c}}_i)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.3.40)$$

De acuerdo al Lema 2.5 en la pág. 22,  $\hat{\mathbf{L}}_i(z)$  factoriza el cero en  $z = \hat{c}_i$  en  $\hat{\mathbf{G}}(z)$ , por lo que el factor unitario

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}(z) = \prod_{i=\hat{n}_c}^{n_c^{\ell\ell} + n_{c\,k\ell} + 1} \hat{\mathbf{L}}_i(z), \quad (6.3.41)$$

es un LUI para  $\hat{\mathbf{G}}(z)$  que factoriza todos los ceros  $\hat{c}_i$  con  $i = n_c^{\ell\ell} + n_{c\,k\ell} + 1, n_c^{\ell\ell} + n_{c\,k\ell} + 2, \dots, \hat{n}_c$ . La diagonalidad de cada factor  $\hat{\mathbf{L}}_i(z)$  implica que  $\hat{\boldsymbol{\xi}}(z)$  es diagonal y, por el Teorema 5.3, se tiene que necesariamente los ceros de FNM  $\hat{c}_i, \forall i = n_c^{\ell\ell} + n_{c\,k\ell} + 1, n_c^{\ell\ell} + n_{c\,k\ell} + 2, \dots, \hat{n}_c$  son canónicos izquierdos. Finalmente, como los únicos ceros de  $\hat{\mathbf{G}}(z)$  que aparecen en la suma (6.3.35) son aquellos que no son canónicos izquierdos y todo cero canónico izquierdo de  $\hat{\mathbf{G}}(z)$  es también canónico izquierdo de  $\mathbf{G}(z)$ , se concluye que todos los ceros de FNM de  $\mathbf{G}(z)$  deben ser canónicos izquierdos.

- (c) Sea la matriz  $\boldsymbol{\xi}'_{\hat{\mathbf{G}}}(z)$  el LUI para  $\hat{\mathbf{G}}(z)$  asociado a los primeros  $n_c^{\ell\ell} + n_{c\,k\ell}$  ceros de FNM en  $\hat{\mathcal{C}}$ . Entonces,

$$\boldsymbol{\xi}'_{\hat{\mathbf{G}}}(z)\hat{\mathbf{G}}(z) = \text{diag}\{\tilde{\mathbf{G}}_{\ell\ell}(z), \xi_{k\ell}^{n_{k\ell}}(z)G_{kk}(z)\} + \tilde{\mathbf{G}}_{k\ell}(z)\mathbf{1}_{21}. \quad (6.3.42)$$

Dado que  $n_{c\,\bar{k}\ell} = 1$ , para construir un GLUI asociado a  $\hat{\mathbf{G}}(z)$  sólo hay un cero de FNM (con multiplicidad algebraica uno) que resta por ser factorizado. Dicho cero está en  $z = c_{\hat{n}_c}$  y es tal que

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\hat{n}_c} = \frac{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}_{k\ell}(c_{\hat{n}_c}) \\ \tilde{\mathbf{G}}_{\ell\ell}(c_{\hat{n}_c}) \\ 1 \end{bmatrix}}{\left\| \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}_{k\ell}(c_{\hat{n}_c}) \\ \tilde{\mathbf{G}}_{\ell\ell}(c_{\hat{n}_c}) \\ 1 \end{bmatrix} \right\|}. \quad (6.3.43)$$

Con el uso de  $\Delta J_1$  in (6.3.35) y la definición de  $\beta(z)$ , el resultado procede.

□□□

La primera parte del Corolario 6.1 indica que el deterioro en el desempeño óptimo producto de las restricciones estructurales impuestas sobre el controlador depende tanto de aquellos ceros de FNM de  $\mathbf{G}(z)$  que no son canónicos izquierdos<sup>2</sup> como de las direcciones  $\hat{\eta}_j$ . Esto último es un resultado muy importante, ya que indica que el deterioro en desempeño con respecto al caso centralizado es altamente dependiente de ciertos rasgos de direccionalidad de los ceros de FNM no canónicos izquierdos. En efecto, se enfatiza que el desempeño óptimo para el caso centralizado,  $J_{opt}$ , no depende de ningún tipo de dirección. Esto significa que la presencia de dichos rasgos direccionales en la solución óptima del problema restringido surge única y exclusivamente por el hecho de forzar una estructura sobre el controlador. Este fenómeno es definitivamente uno de los resultados más importantes de este trabajo de tesis y será explorado con más detalle en la próxima sección para el caso de estructura triangular.

Por otro lado, la parte (b) del corolario anterior concuerda con lo visto en el Teorema 5.4 en la pág. 70, ya que si todos los ceros de FNM de la planta son canónicos izquierdos, entonces la solución óptima no restringida,  $\mathbf{Q}_{opt}(z)$  tiene estructura rala *per se*, por lo que forzar estructura sobre el controlador no deteriora el mejor desempeño alcanzable.

Considérese ahora el caso en que sólo hay un cero de FNM en  $\mathbf{G}(z)$  que no es canónico izquierdo, esto es, de acuerdo a la notación del Teorema 6.1  $n_{c\bar{k}\ell} = 1$ . En dicha situación, la parta (c) del Corolario 6.1 dice que el efecto de este cero de FNM tiene un efecto reducido en el costo extra  $\Delta J_1$  si  $|\tilde{G}_{k\ell}(c_{\hat{n}_c})| \ll |\tilde{G}_{\ell\ell}(c_{\hat{n}_c})|$ . Esto es razonable ya que esta desigualdad es una medida del grado de dominancia diagonal [33, 56] de la planta y, como todos los ceros de FNM de una planta diagonal son canónicos izquierdos, es coherente con los resultados de la parte (b). Además, se puede notar que el efecto de dicho cero será considerable si  $|\tilde{G}_{k\ell}(c_{\hat{n}_c})| \gg |\tilde{G}_{\ell\ell}(c_{\hat{n}_c})|$ , lo cual también es razonable por argumentos similares.

## 6.4. Estructura triangular

En esta sección consideraremos el caso en que tanto el controlador como la planta están restringidos a ser de tipo triangular. A fin de exponer los contenidos de una manera análoga al caso  $\mathcal{S}_1$ , defínase el desempeño y parámetro de Youla óptimos para el caso de control triangular como

$$J_{t\ opt} = \min_{\mathbf{Q}(z) \in \mathcal{RH}_\infty \cap \mathcal{S}_t} J \quad (6.4.1)$$

$$\mathbf{Q}_{t\ opt}(z) = \arg \min_{\mathbf{Q}(z) \in \mathcal{RH}_\infty \cap \mathcal{S}_t} J \quad (6.4.2)$$

El resultado principal de esta sección necesita la idea de *submatrices* asociadas a una matriz de transferencia. A continuación se da una definición precisa de este concepto.

<sup>2</sup>Es decir, los ceros de FNM de  $G_{kk}(z)$  que tienen una multiplicidad algebraica mayor a los mismos en  $G_{k\ell}(z)$ .

**Definición 6.1 (Submatriz  $\ell$  de una matriz de transferencia)**

Sea  $\mathbf{A}(z) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , entonces se define la submatriz  $\ell$  asociada a  $\mathbf{A}(z)$  como la matriz  $\mathbf{A}_\ell(z)$  de tamaño  $(n - \ell + 1) \times (n - \ell + 1)$  tal que

$$[\mathbf{A}_\ell(z)]_{ij} = A_{(i+\ell-1)(j+\ell-1)}(z), \quad \forall i \leq n - \ell + 1, \forall j \leq n - \ell + 1. \quad (6.4.3)$$

Nótese que de acuerdo a esta definición se tiene que  $\mathbf{A}_1(z) = \mathbf{A}(z)$  y  $\mathbf{A}_n(z) = A_{nn}(z)$ .

El teorema expuesto a continuación provee la solución explícita al problema en cuestión, entregando el límite de desempeño para el control triangular de plantas triangulares estables. Debe notarse que la demostración de este importante resultado sigue líneas similares al caso  $\mathcal{S}_1$  pero con algunos aspectos técnicos adicionales (en especial en su segunda parte), por lo que se sugiere al lector usar la demostración del Teorema 6.1 como guía.

**Teorema 6.2 (Límite de desempeño en caso triangular)**

Considérese  $\mathbf{G}(z) \in \mathcal{RH}_2 \cap \mathcal{S}_t$  no singular c. e. t. p. y sin ceros sobre la circunferencia unitaria. Entonces,

(a) El parámetro de Youla óptimo  $\mathbf{Q}_{t \text{ opt}}(z)$  es

$$\mathbf{Q}_{t \text{ opt}}(z) = \sum_{i=1}^n \text{diag} \left\{ \mathbf{0}_{i-1}, \tilde{\mathbf{G}}_i(z)^{-1} \right\} \mathbf{1}_{ii}, \quad (6.4.4)$$

donde  $\tilde{\mathbf{G}}_i(z) = \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{G}_i}(z) \mathbf{G}_i(z)$ ,  $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{G}_i}(z)$  es el GLUI de  $\mathbf{G}_i(z)$  y  $\mathbf{G}_i(z)$  es la submatriz  $i$  de  $\mathbf{G}(z)$ .

(b) Defínase el conjunto ordenado de ceros de FNM (contando multiplicidades) de  $G_{\ell\ell}(z)$  como

$$\mathcal{C}^{\ell\ell} = \left\{ c_1^{\ell\ell}, c_2^{\ell\ell}, \dots, c_{n_c}^{\ell\ell} \right\}, \quad (6.4.5)$$

y, considerando que los ceros de FNM de una matriz triangular estable son los ceros de FNM de los elementos de su diagonal, defínase el conjunto ordenado de ceros de FNM (contando multiplicidades) de  $\mathbf{G}_k(z)$  como

$$\mathcal{C}^k = \left\{ c_1^k, c_2^k, \dots, c_{n_c}^k \right\} \quad (6.4.6)$$

$$= \bigcup_{\ell=k}^n \mathcal{C}^{\ell\ell}, \quad (6.4.7)$$

donde se considera que el operador unión preserva el ordenamiento. Entonces, el de-

sempañó óptimo  $J_{t\text{opt}}$  es

$$J_{t\text{opt}} = J_{\text{opt}} + \sum_{k=1}^n \sum_{i=n_c^{k-1}+1}^{n_c^k} h(c_i^k) \left| \boldsymbol{\eta}_i^k H \mathbf{e}_1^{n-k+1} \right|^2, \quad (6.4.8)$$

donde  $h(\cdot)$  se define como en (6.3.11) y las direcciones  $\boldsymbol{\eta}_i^k$  se definen como en (2.4.14) en la pág. 22 con  $\mathbf{A}(z) = \mathbf{G}_k(z)$ .

### Demostración

(a) Con el uso de la propiedad A.3.8 de la norma 2, el funcional puede expresarse como

$$J = \left\| \frac{\boldsymbol{\Lambda} - \mathbf{G}_A(z) \mathbf{Q}_{\text{vec}}(z)}{z-1} \right\|_2^2, \quad (6.4.9)$$

donde

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^n & \mathbf{e}_1^{n-1} & \cdots & \mathbf{e}_1^1 \end{bmatrix}, \quad (6.4.10)$$

$$\mathbf{Q}_{\text{vec}} = \begin{bmatrix} Q_{11}(z) & Q_{21}(z) & \cdots & Q_{n1}(z) & Q_{22}(z) & Q_{32}(z) & \cdots & Q_{n2}(z) & \cdots & Q_{nn}(z) \end{bmatrix}^T \quad (6.4.11)$$

$$\mathbf{G}_A(z) = \text{diag} \{ \mathbf{G}_1(z), \mathbf{G}_2(z), \dots, \mathbf{G}_n(z) \}. \quad (6.4.12)$$

Dado que  $\mathbf{G}_A(z)$  es diagonal por bloques, la matriz

$$\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{G}_A}(z) = \text{diag} \{ \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{G}_1}(z), \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{G}_2}(z), \dots, \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{G}_n}(z) \}, \quad (6.4.13)$$

es el GLUI de la matriz aumentada  $\mathbf{G}_A(z)$ . Siguiendo un procedimiento similar al del Teorema 6.1, (6.4.9) se puede escribir como

$$J = \left\| \frac{\boldsymbol{\xi}_A(z) \boldsymbol{\Lambda} - \boldsymbol{\Lambda}}{z-1} \right\|_2^2 + \left\| \frac{\boldsymbol{\Lambda} - \tilde{\mathbf{G}}_A(z) \mathbf{Q}_{\text{vec}}(z)}{z-1} \right\|_2^2, \quad (6.4.14)$$

donde  $\tilde{\mathbf{G}}_A(z) = \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{G}_A}(z) \mathbf{G}_A(z)$ . Luego, el vector óptimo  $\mathbf{Q}_{\text{vec opt}}(z)$  que minimiza  $J$  es tal que minimiza al segundo término de (6.4.14), esto es

$$\mathbf{Q}_{\text{vec opt}}(z) = \tilde{\mathbf{G}}_A(z)^{-1} \boldsymbol{\Lambda}. \quad (6.4.15)$$

Esta elección para  $\mathbf{Q}_{\text{vec opt}}(z)$  anula el segundo término de (6.4.14) y, notando que  $\tilde{\mathbf{G}}_A(1) \mathbf{Q}_{\text{vec opt}}(1) = \boldsymbol{\Lambda}$ , garantiza que la norma está bien definida. De este modo, el hecho que  $\tilde{\mathbf{G}}_A(z)$  es bipropia y FM implica que  $\mathbf{Q}_{\text{vec opt}}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$ , con lo cual  $\mathbf{Q}_{t\text{opt}}(z)$

puede ser reconstruido a partir de los elementos de  $\mathbf{Q}_{vec\ opt}(z)$  como

$$\mathbf{Q}_{t\ opt}(z) = \sum_{i=1}^n \text{diag} \left\{ \mathbf{0}_{i-1}, \tilde{\mathbf{G}}_i^{-1}(z) \right\} \mathbf{1}_{ii}, \quad (6.4.16)$$

donde la matriz  $\mathbf{1}_{ii} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  tiene todos sus elementos nulos salvo el  $(i, i)$ , en el cual tiene un uno.

(b) A partir de (6.4.14) se tiene que

$$J_{t\ opt} = \left\| \frac{1}{z-1} \{ \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{A}}(z) - \mathbf{I} \} \boldsymbol{\Lambda} \right\|_2^2. \quad (6.4.17)$$

Luego, usando (6.4.11) y (6.4.13), el costo óptimo puede ser escrito como

$$J_{t\ opt} = \sum_{k=1}^n \underbrace{\left\| \frac{1}{z-1} \{ \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{G}_k}(z) - \mathbf{I}_k \} \mathbf{e}_1^{n-k+1} \right\|_2^2}_{J_{t\ opt}^k} \quad (6.4.18)$$

$$= \sum_{k=1}^n J_{t\ opt}^k. \quad (6.4.19)$$

De manera análoga al caso ralo, el GLUI  $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{G}_k}(z)$  puede ser construido usando el ordenamiento de los ceros de FNM definido por el conjunto  $\mathcal{C}^k$  en (6.4.7). De este modo, el  $k$ -ésimo costo óptimo en (6.4.19) se puede calcular usando el Lema 4.1 en la pág. 53 con  $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1^{n-k+1}$  como

$$J_{t\ opt}^k = \sum_{i=1}^{n_c^k} h(c_i^k) \left| \boldsymbol{\eta}_i^{kH} \mathbf{e}_1^{n-k+1} \right|^2, \quad (6.4.20)$$

Aislando los primeros  $n_c^{kk}$  términos en (6.4.20), es decir, todos los términos que involucran a los ceros de FNM en  $\mathcal{C}^{kk}$  (ceros de FNM de  $G_{kk}(z)$ ), se obtiene

$$J_{t\ opt}^k = \sum_{i=1}^{n_c^{kk}} h(c_i^k) \left| \boldsymbol{\eta}_i^{kH} \mathbf{e}_1^{n-k+1} \right|^2 + \sum_{i=n_c^{kk}+1}^{n_c^k} h(c_i^k) \left| \boldsymbol{\eta}_i^{kH} \mathbf{e}_1^{n-k+1} \right|^2, \quad (6.4.21)$$

donde la segunda sumatoria está bien definida ya que cuando  $n_c^{kk} = n_c^k$ , entonces  $i > n_c^k$  y la suma no contiene términos.

El ordenamiento en  $\mathcal{C}^k$  implica que en la construcción del GLUI para  $\mathbf{G}_k(z)$  primero se factorizan los ceros de FNM de  $\mathbf{G}_k(z)$  que también son ceros de  $[\mathbf{G}_k(z)]_{11} = G_{kk}(z)$ , luego secuencialmente factorizamos los ceros de  $\mathbf{G}_k(z)$  que también son ceros de  $[\mathbf{G}_k(z)]_{22}$ ,  $[\mathbf{G}_k(z)]_{33}$ ,  $\dots$ ,  $[\mathbf{G}_k(z)]_{(n-k+1)(n-k+1)}$ . Como cada submatriz  $\mathbf{G}_k(z)$  es triangular, es-

to implica que los primeros  $n_c^{kk}$  ceros de FNM en  $\mathcal{C}^k$  son tales que  $[\mathbf{G}_k(c_i^{kk})]_{1*} = [\mathbf{G}_k(c_i^k)]_{1*} = \mathbf{0}$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, n_c^{kk}$ , es decir, son canónicos izquierdos y anulan la primera fila de  $\mathbf{G}_k(z)$ . Gracias al uso del Lema 5.3 en la pág. 69, lo anterior significa que  $\boldsymbol{\eta}_i^k = \mathbf{e}_1^{n-k+1}$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, n_c^{kk}$ , por lo que (6.4.21) se reduce a

$$J_{t\,opt}^k = \sum_{i=1}^{n_c^{kk}} h(c_i^k) + \sum_{i=n_c^{kk}+1}^{n_c^k} h(c_i^k) |\boldsymbol{\eta}_i^{kH} \mathbf{e}_1^{n-k+1}|^2. \quad (6.4.22)$$

Reemplazando (6.4.22) en (6.4.19), el costo mínimo total resulta

$$J_{t\,opt} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{n_c^{kk}} h(c_i^k) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=n_c^{kk}+1}^{n_c^k} h(c_i^k) |\boldsymbol{\eta}_i^{kH} \mathbf{e}_1^{n-k+1}|^2. \quad (6.4.23)$$

Con la definición de  $h(c_i^k)$  en (6.3.11) y notando que  $c_i^k = c_i^{kk}$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, n_c^{kk}$ , se tiene

$$\sum_{i=1}^{n_c^{kk}} h(c_i^k) = d^{kk} + \sum_{i=1}^{r^{kk}} \frac{|q_i^{kk}|^2 - 1}{|1 - q_i^{kk}|^2}, \quad (6.4.24)$$

donde  $d^{kk}$  es el número de ceros en infinito de  $G_{kk}$  y  $\{q_1^{kk}, q_2^{kk}, \dots, q_{r^{kk}}^{kk}\}$  es el conjunto de ceros de FNM finitos de  $G_{kk}(z)$ . Finalmente, reemplazando (6.4.24) en (6.4.23), el costo óptimo sin restricción estructural  $J_{opt}$  en (4.3.15) se puede reconocer como sigue

$$J_{t\,opt} = \sum_{k=1}^n \left( d^{kk} + \sum_{i=1}^r \frac{|q_i^{kk}|^2 - 1}{|1 - q_i^{kk}|^2} \right) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=n_c^{kk}+1}^{n_c^k} h(c_i^k) |\boldsymbol{\eta}_i^{kH} \mathbf{e}_1^{n-k+1}|^2 \quad (6.4.25)$$

$$= \underbrace{d + \sum_{i=1}^r \frac{|q_i|^2 - 1}{|1 - q_i|^2}}_{J_{opt}} + \sum_{k=1}^n \sum_{i=n_c^{kk}+1}^{n_c^k} h(c_i^k) |\boldsymbol{\eta}_i^{kH} \mathbf{e}_1^{n-k+1}|^2, \quad (6.4.26)$$

donde  $d$  es el número de ceros en infinito de  $\mathbf{G}(z)$  y el  $\{q_1, q_2, \dots, q_r\}$  es el conjunto de cero de FNM finitos de  $\mathbf{G}(z)$ .

□□□

El resultado del Teorema 6.2 es bastante potente, ya que además de entregar una expresión analítica para el parámetro de Youla triangular óptimo, cuantifica de manera explícita el mejor desempeño alcanzable en control triangular con integración<sup>3</sup> de plantas triangulares estables. La discusión relativa a este resultado procede por partes y, en primera instancia,

<sup>3</sup>El controlador tiene integración en forma garantizada ya que  $\mathbf{Q}_{t\,opt}(1) = \mathbf{G}^{-1}(1)$ .

nos ocuparemos de estudiar el modo en que se construye la solución  $\mathbf{Q}_{t\text{opt}}(z)$ . A continuación se expone un ejemplo ilustrativo respecto a este punto en el cual se replican algunos de los pasos de la demostración de la parte (a) del Teorema 6.2 para un caso en particular.

**Ejemplo 6.2:** *Considérese  $\mathbf{G}(z) \in \mathcal{S}_t \cap \mathcal{RH}_2$  dada por*

$$\mathbf{G}(z) = \begin{bmatrix} G_{11}(z) & 0 & 0 \\ G_{21}(z) & G_{22}(z) & 0 \\ G_{31}(z) & G_{32}(z) & G_{33}(z) \end{bmatrix}. \quad (6.4.27)$$

*Si el parámetro de Youla que garantiza que  $\mathbf{C}(z)$  es un controlador admisible con estructura triangular se define como*

$$\mathbf{Q}(z) = \begin{bmatrix} Q_{11}(z) & 0 & 0 \\ Q_{21}(z) & Q_{22}(z) & 0 \\ Q_{31}(z) & Q_{32}(z) & Q_{33}(z) \end{bmatrix} \in \mathcal{RH}_\infty, \quad (6.4.28)$$

*entonces el funcional de costo  $J$  puede expresarse como*

$$J = \left\| \left( \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\Lambda} - \underbrace{\begin{bmatrix} G_{11}(z) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_{21}(z) & G_{22}(z) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_{31}(z) & G_{32}(z) & G_{33}(z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{22}(z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{32}(z) & G_{33}(z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{33}(z) \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}_A} \underbrace{\begin{bmatrix} Q_{11}(z) \\ Q_{21}(z) \\ Q_{31}(z) \\ Q_{22}(z) \\ Q_{32}(z) \\ Q_{33}(z) \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}_{\text{vec}}(z)} \right) \frac{1}{z-1} \right\|_2^2. \quad (6.4.29)$$

*Con el uso de (6.4.15) se tiene*

$$\mathbf{Q}_{\text{vecopt}}(z) = \left( \underbrace{\begin{bmatrix} \xi_{G_1}(z) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \xi_{G_2}(z) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \xi_{G_3}(z) \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{G}}_A(z)} \mathbf{G}_A(z) \right)^{-1} \Lambda \quad (6.4.30)$$

$$= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}_1(z)^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{G}}_2(z)^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{G}}_3(z)^{-1} \end{bmatrix} \Lambda, \quad (6.4.31)$$

donde  $\mathbf{0}$  denota la matriz nula de dimensiones apropiadas y  $\xi_{G_1}(z)$ ,  $\xi_{G_2}(z)$  y  $\xi_{G_3}(z)$  son GLUI de

$$\mathbf{G}_1(z) = \mathbf{G}(z), \quad \mathbf{G}_2(z) = \begin{bmatrix} G_{22}(z) & 0 \\ G_{32}(z) & G_{33}(z) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_3(z) = G_{33}(z), \quad (6.4.32)$$

respectivamente. El parámetro de Youla óptimo puede ser reconstruido usando (6.4.4)

$$\mathbf{Q}_{t \text{ opt}}(z) = \tilde{\mathbf{G}}_1(z)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{G}}_2(z)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\mathbf{G}}_3(z)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.4.33)$$

■

Tal como el ejemplo anterior deja de manifiesto, la forma como se construye  $\mathbf{Q}_{t \text{ opt}}(z)$  en el Teorema 6.2 tiene cierto grado de secuencialidad. En efecto, a partir (6.4.4) se puede notar que

$$[\mathbf{Q}_{t \text{ opt}}(z)]_{nn} = (\xi_{G_n}(z)G_n(z))^{-1}, \quad (6.4.34)$$

El lado derecho de la expresión anterior es la solución óptima  $\mathbf{Q}_{\text{opt}}(z)$  para el problema sin restricción estructural del Lema 4.2 asociado a la matriz de transferencia  $\mathbf{G}_n(z)$ . Luego, como  $\mathbf{G}_n(z)$  siempre es escalar, esto indica que  $[\mathbf{Q}_{t \text{ opt}}(z)]_{nn}$  debe ser elegida de modo tal de minimizar la función de sensibilidad de un lazo SISO con integración en torno a  $G_{nn}(z)$ . Un análisis similar indica que, por ejemplo, el vector  $\left[ [\mathbf{Q}_{t \text{ opt}}(z)]_{(n-1),(n-1)} \quad [\mathbf{Q}_{t \text{ opt}}(z)]_{n,(n-1)} \right]^T$  debe ser elegido idéntico a la primera columna de la solución óptima no restringida  $\mathbf{Q}_{\text{opt}}(z)$  del Lema 4.2 asociada a la submatriz  $\mathbf{G}_{n-1}(z)$ . Repitiendo este análisis para las demás columnas de  $\mathbf{Q}_{t \text{ opt}}(z)$ , la secuencialidad en su construcción se hace evidente. En el Procedimiento 1 del capítulo siguiente se entregará una descripción más formal de esta idea al formular un algoritmo de diseño de controladores triangulares.

Una característica muy interesante de este fenómeno es que sugiere un orden en la secuencia de construcción de  $\mathbf{Q}_{t \text{ opt}}(z)$  que es contrario a aquel propio de los métodos de diseño MIMO secuencial clásicos [63–66]. De hecho, estos métodos indican que si la planta es triangular y se desea un controlador con la misma estructura, entonces el diseño debiera elegir  $[\mathbf{Q}_{t \text{ opt}}(z)]_{11}$  dependiente sólo de  $G_{11}(z)$ . No obstante, a la luz de (6.4.34) y los comentarios recién hechos, es claro que el Teorema 6.2 sugiere algo distinto, es decir, que  $[\mathbf{Q}_{t \text{ opt}}(z)]_{nn}$  es el que debe ser elegido dependiente sólo de  $G_{nn}(z)$  y que  $[\mathbf{Q}_{t \text{ opt}}(z)]_{11}$  debe elegirse considerando todos los elementos de la planta. La diferencia entre los dos enfoques surge del hecho que para un sistema triangular, la  $n$ -ésima entrada afecta sólo a la  $n$ -ésima

salida, de modo tal que la única porción del controlador que puede ser elegida sin afectar las demás dinámicas es aquella relacionada con el elemento  $(n, n)$  del parámetro de Youla. Esto indica que, desde la perspectiva de la optimalidad, la elección clásica en la secuencia de diseño puede no ser la más apropiada y puede ser la razón por la cual los métodos de diseño secuencial clásicos normalmente requieren de procedimientos iterativos.

Por otro lado, de acuerdo a los resultados del Teorema 5.4 sabemos que si la planta es triangular y todos los ceros de FNM de la planta son canónicos izquierdos, entonces la solución del problema no restringido es triangular en forma natural. Este hecho, al igual que para el caso de estructura rala simple, se relaciona con la forma del desempeño óptimo en (6.4.8) y se explora en detalle en el siguiente corolario.

**Corolario 6.2 (Deterioro en desempeño para caso triangular)**

Considérese  $\mathbf{G}(z) \in \mathcal{RH}_\infty \cap \mathcal{S}_t$  no singular c. e. t. p., sin ceros sobre la circunferencia unitaria y la notación y resultados del Teorema 6.2. Entonces,

(a) El costo extra que se origina por el hecho de forzar  $\mathbf{C}(z) \in \mathcal{S}_t$  es

$$\Delta J_t = J_{t \text{ opt}} - J_{\text{opt}} \quad (6.4.35)$$

$$= \sum_{k=1}^n \sum_{i=n_c^{kk}+1}^{n_c^k} h(c_i^k) \left| \boldsymbol{\eta}_i^k \mathbf{e}_1^{n-k+1} \right|^2. \quad (6.4.36)$$

(b)  $\Delta J_t = 0$  si y sólo si todo cero de FNM de  $\mathbf{G}(z)$  es canónico izquierdo.

**Demostración:**

1. Directa del Teorema 6.2.

2. ■ ( $\Leftarrow$ ) Si todos los ceros de FNM de  $\mathbf{G}(z)$  son canónicos izquierdos entonces todos los ceros de FNM de cada submatriz  $\mathbf{G}_k(z)$  con  $k = 1, 2, \dots, n$  son también canónicos izquierdos. Por el Lema 5.3 en la pág. 69 esto significa que las direcciones  $\boldsymbol{\eta}_i^k$  son todas elementales. En particular, se tiene que

$$\boldsymbol{\eta}_i^k \neq \mathbf{e}_1^{n-k+1}, \quad \forall i = n_c^{kk} + 1, n_c^{kk} + 2, \dots, n_c^k, \quad (6.4.37)$$

lo cual implica que  $\boldsymbol{\eta}_i^k \perp \mathbf{e}_1^{n-k+1}$  y  $\boldsymbol{\eta}_i^{kH} \mathbf{e}_1^{n-k+1} = 0$  para todo  $i = n_c^{kk} + 1, n_c^{kk} + 2, \dots, n_c^k$ . Luego, de acuerdo a (6.4.36) se obtiene  $\Delta J_t = 0$ .

■ ( $\Rightarrow$ ) Si  $\Delta J_t = 0$  entonces por (6.4.36) necesariamente se debe cumplir que

$$\boldsymbol{\eta}_i^k \perp \mathbf{e}_1^{n-k+1}, \quad \forall i = n_c^{kk} + 1, n_c^{kk} + 2, \dots, n_c^k. \quad (6.4.38)$$

Defínase el factor unitario

$$\mathbf{L}_i^k(z) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_i^k & \mathbf{U}_i^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{(1 - z\bar{c}_i^k)(1 - c_i^k)}{(z - c_i^k)(1 - \bar{c}_i^k)} & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{(n-k)(n-k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_i^{kH} \\ \mathbf{U}_i^{kH} \end{bmatrix}, \quad (6.4.39)$$

donde  $\mathbf{U}_i^k$  es tal que la matriz  $\begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_i^k & \mathbf{U}_i^k \end{bmatrix}$  es unitaria. De acuerdo a (6.4.38), la dirección  $\boldsymbol{\eta}_i^k$  es elemental  $\forall i = n_c^{kk} + 1, n_c^{kk} + 2, \dots, n_c^k$ , por lo cual  $\begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_i^k & \mathbf{U}_i^k \end{bmatrix}$  es una matriz de permutación y, entonces,  $\mathbf{L}_i^k(z)$  es diagonal. Esto implica por el Lema 2.5 que la matriz unitaria

$$\boldsymbol{\xi}^k(z) = \prod_{i=n_c^k}^{n_c^{kk}+1} \mathbf{L}_i^k(z) \quad (6.4.40)$$

es un LUI diagonal para  $\mathbf{G}_k(z)$  asociado al conjunto de ceros de FNM  $\{c_{n_c^{kk}+1}, c_{n_c^{kk}+2}, \dots, c_{n_c^k}\}$  y, por el Teorema 5.3, se tiene que todos los ceros de FNM en dicho conjunto son canónicos izquierdos  $\forall k$ . En particular esto es válido para  $k = 1$  y, dado que  $\mathbf{G}_1(z) = \mathbf{G}(z)$ , se concluye que todos los ceros de FNM de  $\mathbf{G}(z)$  son canónicos izquierdos.

□□□

La cantidad  $\Delta J_t$  en el Corolario 6.2 es una medida del deterioro en desempeño que se produce por restringir la estructura del controlador a una triangular. Tal como la parte (b) de este corolario deja de manifiesto, dicho deterioro depende sólo de los ceros de FNM de la planta que son canónicos izquierdos y de ciertas direcciones asociadas. Esto es consistente con lo expuesto por el Teorema 5.4 respecto de la influencia de este tipo de ceros en la estructura de la solución óptima no restringida. Una discusión más acabada de la dependencia de  $\Delta J_t$  con respecto a los rasgos dinámicos de la planta se presenta a continuación. Nótese que todos los comentarios que prosiguen se aplican también al caso  $\mathcal{S}_1$  de la sección anterior.

- (a) Los únicos ceros de FNM que degradan el mejor desempeño alcanzable con respecto al caso centralizado son aquellos que no son canónicos izquierdos. En efecto, sea  $z = c_i$  un cero de FNM canónico izquierdo que anula la  $j$ -ésima fila de  $\mathbf{G}(z)$ . Dicho cero de FNM también será canónico izquierdo para las submatrices  $\mathbf{G}_k(z)$  con  $k = j, j + 1, \dots, n$ . Luego, como  $\Delta J_t$  en (6.4.36) depende sólo de aquellos ceros de FNM de  $\mathbf{G}_k(z)$  que no son ceros de  $G_{kk}(z)$ , si para un  $k$  fijo el cero en  $z = c_i$  es tal que  $j = k$ , entonces su influencia en  $\Delta J_t$  es nula ya que  $c_i$  no aparece en la suma. Por el contrario, si  $j > k$ , entonces el cero aparece en  $\Delta J_t$ , pero la dirección asociada es tal que  $\boldsymbol{\eta}_i^k \perp \mathbf{e}_1^{n-k+1}$ , con lo cual su contribución al costo extra también es nula.

- (b) La forma de  $h(c_i^k)$  indica que los ceros de FNM no canónicos izquierdos más dañinos para el desempeño óptimo son aquellos que se ubican cercanos a  $z = 1$ . Esto es tiene sentido a la luz de resultados previos en [11–13] que no consideran restricciones estructurales sobre el controlador.
- (c) Las direcciones  $\eta_i^k$  limitan el desempeño dependiendo de cuán alineadas estén con el vector elemental  $e_1^{n-k+1}$ . De hecho, dado que las direcciones  $\eta_i^k$  están asociadas a cada submatriz  $G_k(z)$ , se hace evidente que éstas condensan información relativa a la interacción dinámica entre los distintos subsistemas definidos por  $G_k(z)$ . Esto implica que, en definitiva, el nivel de interacción dinámica de la planta puede afectar severamente el desempeño del lazo. Debe señalarse que esta afirmación debe verse reflejada en los factores que aparecen en  $\eta_i^k$  al ser calculada de forma explícita. No obstante, la forma general de las direcciones  $\eta_i^k$  es muy complicada de manejar. A fin de dar claridad a este punto puede examinarse la expresión en (6.3.43), en donde se calcula la dirección explícita para el caso ralo simple suponiendo que la planta tiene sólo un cero de FNM no canónico izquierdo.
- (d) Tal como se menciona para el caso ralo simple, el hecho que  $\Delta J_t$  depende de aspectos direccionales condensados en  $\eta_i^k$  es una característica de alta importancia conceptual para los objetivos de esta tesis. Dado que el desempeño óptimo sin restricción estructural,  $J_{opt}$ , depende sólo de la ubicación de los ceros de FNM, es evidente que la influencia de  $\eta_i^k$  aparece exclusivamente al hecho de restringir estructura sobre el controlador. Esto es un rasgo propio del control restringido en estructura que no está presente en el control centralizado.

Para ilustrar los aspectos relevantes de la discusión anterior, en el próximo ejemplo se calcula en forma explícita el deterioro en desempeño producto de la restricción estructural para una planta  $2 \times 2$ . Además, el ejemplo debe servir para aclarar la relación entre el costo extra y las direcciones  $\eta_i^k$ .

**Ejemplo 6.3:** *Supóngase que se desea calcular el desempeño óptimo para el control triangular de una planta triangular estable dada por*

$$\mathbf{G}(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{z} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2c^2+1}} \frac{z-c}{z^2} & \frac{z-\alpha}{z^2} \end{bmatrix}, \quad (6.4.41)$$

donde  $|\alpha| > 1$  y

$$c = \alpha \frac{b\sqrt{2\alpha^2 - (2\alpha^2 b^2 - 1)} - 1}{2\alpha^2 b^2 - 1}, \quad (6.4.42)$$

con  $b$  arbitrario. En esta situación, si  $\mathbf{W}_c$  y  $\mathbf{W}_o$  denotan los gramianos de controlabilidad y observabilidad asociados a  $G_{21}(z)$  [34, 67], entonces la cantidad  $\text{traza}\{\mathbf{W}_c\mathbf{W}_o\} \equiv 1$ . De acuerdo a [34], si se usa la Matriz de Participación (MP) como medida de interacción dinámica, lo anterior implica que para un valor de  $\alpha$  fijo, el grado de interacción entre  $G_{21}(z)$  y las demás dinámicas en  $\mathbf{G}(z)$  es independiente de  $b$ .

Este sistema tiene un cero en infinito (con multiplicidad algebraica dos) y un único cero de FNM finito en  $z = \alpha$ . Se sugiere al lector verificar que el cero en infinito es canónico izquierdo y entonces, su efecto en el costo extra es nulo. El uso directo de (6.4.36) indica que

$$\Delta J_t = \frac{|\alpha|^2 - 1}{|1 - \alpha|^2} |\boldsymbol{\eta}_3^1{}^H \mathbf{e}_1^2|^2, \quad (6.4.43)$$

donde

$$\boldsymbol{\eta}_3^1 = \begin{bmatrix} -b \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 + b^2}}. \quad (6.4.44)$$

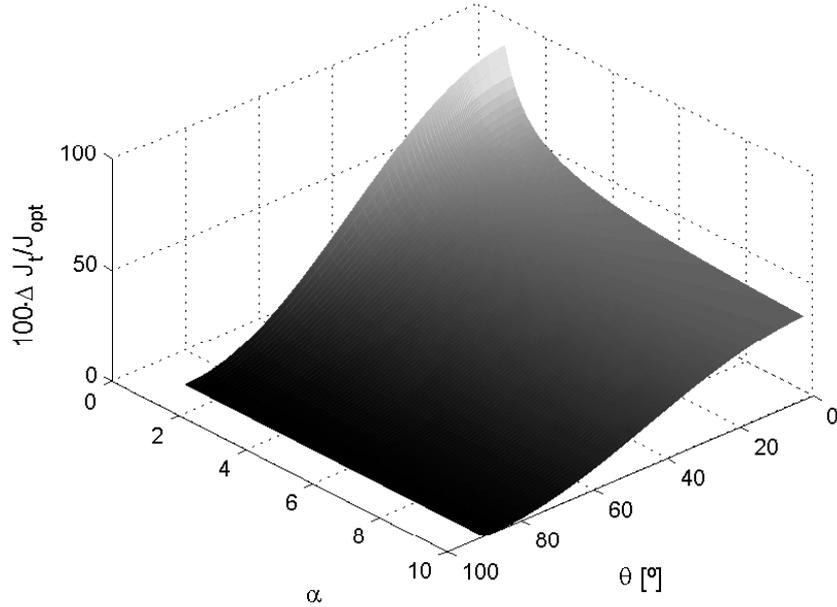
El costo extra puede ser expresado en términos del cero de FNM finito y del ángulo  $\theta$  entre  $\boldsymbol{\eta}_3^1$  y  $\mathbf{e}_1^2$ , es decir

$$\Delta J_t = (\cos(\theta))^2 \frac{|\alpha|^2 - 1}{|1 - \alpha|^2}, \quad (6.4.45)$$

donde  $\cos(\theta) = b/\sqrt{1 + b^2}$ . Por otro lado, usando (4.3.15) en la pág. 55, el desempeño óptimo sin restricciones estructurales es

$$J_{opt} = 2 + \frac{|\alpha|^2 - 1}{|1 - \alpha|^2}. \quad (6.4.46)$$

En la Fig. 6.1 se muestra la gráfica del costo extra relativo,  $100 \cdot \Delta J_t / J_{opt}$ , en función del cero en  $\alpha$  y el ángulo  $\theta$ .



**Figura 6.1.** Costo extra relativo para planta del Ejemplo 6.3 en función de  $\alpha$  y  $\theta$ .

Se pueden extraer algunas conclusiones importantes a partir de los resultados de la Fig. 6.1, a saber:

- (a) Tanto  $\Delta J_t$  como  $J_{opt}$  pueden tomar valores arbitrariamente grandes a medida que el cero de FNM no canónico izquierdo se acerca a  $z = 1$ . Esto implica que el costo extra relativo  $\Delta J_t / J_{opt}$  también crece a medida que  $\alpha \rightarrow 1$ , pero permanece acotado tal como indican (6.4.45) y (6.4.46). Una excepción a esto es cuando  $\theta = \pi/2$ , es decir  $b = 0$ , y entonces el cero en  $z = \alpha$  es canónico izquierdo, por lo que  $\Delta J_t = 0$ .
- (b) Del mismo modo, se puede notar que para valores de  $\theta$  relativamente grandes, por ejemplo  $\theta = 70^\circ$ , la influencia del cero en  $z = \alpha$  en el costo extra relativo es pequeña incluso para  $\alpha \rightarrow 1$ . Esto pone en evidencia que  $\theta$  puede atenuar considerablemente el efecto dañino de los ceros de FNM cercanos a  $z = 1$  sobre el deterioro en el desempeño óptimo respecto del caso centralizado.
- (c) Para un cero suficientemente alejado del disco unitario, por ejemplo  $\alpha = 8$ , el costo extra depende fuertemente del ángulo  $\theta$ . En efecto, si  $\alpha \rightarrow \infty$  entonces  $\Delta J_t$  depende sólo de  $\theta$  y alcanza el 33% en el peor caso.
- (d) Las afirmaciones previas indican que el grado de alineación de  $\eta_3^1$  con  $e_1^3$  medido en términos del ángulo  $\theta$  puede tener un impacto no menor en el desempeño alcanzable. Esta

*conclusión puede ser generalizada y revela un nuevo rasgo dinámico que puede limitar en forma severa el desempeño óptimo. Esto es una característica propia del control restringido en estructura y marca un diferencia clara con respecto al caso centralizado del Capítulo 4.*

■

## 6.5. Conclusiones

Los desarrollos de este capítulo se han enfocado básicamente a obtener expresiones explícitas para el desempeño óptimo en lazos de control MIMO cuando tanto el controlador como la planta poseen una estructura restringida. En el caso de una estructura diagonal por bloques, se ha visto que el controlador óptimo centralizado es también diagonal por bloques, por lo que las restricciones estructurales sobre éste no tiene impacto en el límite de desempeño.

Por otro lado, para el caso ralo simple y triangular se cuantifica el deterioro en el desempeño óptimo con respecto al caso centralizado producto de la restricción estructural sobre el controlador. Los resultados son coherentes respecto del capítulo anterior, ya que si la planta posee sólo ceros de FNM canónicos izquierdos, las expresiones obtenidas indican que forzar estructura sobre el controlador no tiene efecto alguno sobre el mejor desempeño alcanzable. Además, queda de manifiesto que el hecho que un cero de FNM sea canónico izquierdo es un fenómeno que tiene implicancias importantes. En efecto, *los únicos ceros de FNM que contribuyen al deterioro en desempeño son aquellos que no son canónicos izquierdos.*

Un aspecto de importancia fundamental es que la influencia de los ceros de FNM no canónicos izquierdos se manifiesta no sólo por su cercanía a  $z = 1$ , sino que además por ciertos rasgos direccionales que se relacionan con el grado de interacción dinámica entre los subsistemas que conforman a la planta. Esta direccionalidad es la que en definitiva cuantifica cuán lejos está el cero de ser canónico izquierdo. Dado que el desempeño óptimo centralizado depende sólo de la ubicación de los ceros de FNM, esta característica marca una diferencia radical con respecto al caso de control centralizado y surge única y exclusivamente por el hecho de restringir la estructura del controlador. De hecho, este fenómeno puede ocasionar que ceros de FNM cercanos a  $z = 1$  sean muy dañinos para el desempeño óptimo (como es usual), *pero no necesariamente para el deterioro de éste con respecto al control centralizado.* Cabe señalar que en la literatura actual no existen resultados de tipo analítico relativos a límites de desempeño en control con estructura restringida, por lo que nuestros resultados constituyen una contribución importante al área.

Finalmente, se deja en evidencia que la construcción del parámetro de Youla óptimo de estructura triangular tiene características que recuerdan a las metodologías clásicas de

diseño MIMO secuencial. No obstante, se puede notar que el orden de la secuencia sugerido por la solución óptima del problema de límites de desempeño es distinto al tradicional. Esto es un resultado potente que refleja las ventajas de optar por procedimientos explícitos en la resolución del problema de optimización por sobre metodologías numéricas que no entregan información sobre la naturaleza de la solución.

# METODOLOGÍA DE DISEÑO DE CONTROLADORES TRIANGULARES

### 7.1. Introducción

Los desarrollos del capítulo anterior motivan la búsqueda de procedimientos sistemáticos de diseño de controladores de estructura restringida. Tal como se describe en el Capítulo 5, esto tiene sentido cuando el modelo de la planta tiene un patrón de interacciones que justifican el restringir la estructura de control.

En el caso de estructura triangular, los resultados en la literatura actual son bastante escasos. Entre ellos se encuentran [61, 62], donde los autores desarrollan métodos que permiten obtener un controlador triangular óptimo para una planta triangular y [55], en el cual los autores abordan el caso de una planta general pero sin garantizar la estabilidad del lazo. Recientemente se ha reportado una metodología interesante en [63] basada en los procedimientos de síntesis secuencial [64–66], pero que también sólo aborda el caso en que la planta es triangular.

En este capítulo se propone un método general de diseño de controladores triangulares para plantas estables. El método se basa en el diseño óptimo de un controlador admisible restringido para la porción triangular de la planta. Dicho controlador triangular óptimo se aplica luego a la planta, de modo tal que mediante el ajuste de una función de ponderación en el problema de optimización se puede regular el ancho de banda conseguido y así conseguir estabilidad y un desempeño acorde a los requerimientos de diseño.

El desarrollo del método tiene su origen en una extensión de los procedimientos empleados en el capítulo anterior para el cómputo de límites de desempeño con estructura restringida. Esta extensión es bastante directa y provee una metodología de diseño que, si bien es óptima sólo para la porción triangular de la planta, tiene la ventaja de ser indepen-

diente de procedimientos numéricos y permitir incorporar criterios de diseño.

## 7.2. Descripción del método propuesto

### 7.2.1. Control triangular

En el capítulo precedente se ha considerado que la planta  $\mathbf{G}(z)$  tiene estructura triangular por sí misma y, a su vez, esto permite que para garantizar que el controlador  $\mathbf{C}(z) \in \mathcal{S}_t$ , basta con elegir un parámetro de Youla  $\mathbf{Q}(z)$  con la misma estructura (ver Teorema 5.1 en pág. 62). Sin embargo, en este capítulo nuestro interés está en diseñar controladores triangulares para plantas que no necesariamente son estructuradas. Esto hace imperativo establecer las condiciones que debe satisfacer  $\mathbf{Q}(z)$  de modo tal que se asegure la estructura deseada sobre el controlador. El siguiente lema entrega dicho resultado.

#### Lema 7.1 (Condiciones generales para $\mathbf{C}(z) \in \mathcal{S}_t$ )

Sea  $\mathbf{G}(z)$  que satisface las condiciones de la Suposición 1 en la pág. 61 y considérese la parametrización de Youla clásica de todos los controladores admisibles en el Lema 3.1

$$\mathbf{C}(z) = \mathbf{Q}(\mathbf{I} - \mathbf{G}(z)\mathbf{Q}(z))^{-1}, \quad (7.2.1)$$

donde  $\mathbf{Q}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$ . Entonces  $\mathbf{C}(z) \in \mathcal{S}_t$  si y sólo si  $\mathbf{Q}(z)$  satisface

$$[\mathbf{Q}^{-1}(z)]_{ij} = G_{ij}(z), \quad \forall i = 1, 2, \dots, n, \quad \forall j > i \quad (7.2.2)$$

#### Demostración:

Como  $\mathbf{G}(z)$  satisface la Suposición 1, entonces  $\mathbf{Q}(z)$  y  $\mathbf{C}(z)$  son no singulares c. e. t. p. (ver pág. 61 y demostración del Teorema 5.1 en la pág. 62), por lo cual (7.2.1) implica que  $\mathbf{C}^{-1}(z) = \mathbf{Q}^{-1}(z) - \mathbf{G}(z)$  está bien definida. Luego, como el conjunto  $\mathcal{S}_t$  es estructuralmente cerrado bajo inversión (ver pág. 62),  $\mathbf{C}(z) \in \mathcal{S}_t$  si y sólo si  $\mathbf{C}^{-1}(z) \in \mathcal{S}_t$ , lo que junto con la expresión para  $\mathbf{C}^{-1}(z)$  implican que  $\mathbf{Q}(z)$  debe satisfacer (7.2.2) y el resultado procede.

□□□

### 7.2.2. Criterio de optimalidad

Para que un diseño óptimo tenga sentido, el problema de optimización asociado debe ser planteado en términos de la minimización de un funcional representativo de los objetivos de control. Una alternativa razonable es minimizar la norma 2 de la función de sensibilidad ponderada, es decir para una planta  $\mathbf{G}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$ , usando (7.2.1) podemos definir el

funcional

$$J(\mathbf{G}, \mathbf{W}) = \left\| \left( \mathbf{I} - \mathbf{G}(z)\mathbf{Q}(z) \right) \frac{\mathbf{W}(z)}{z-1} \right\|_2^2, \quad (7.2.3)$$

donde  $\mathbf{W}(z)$  es una matriz de ponderación en frecuencia estable, bipropia y de FM. Dado que estamos interesados en controladores que provean integración, se debe cumplir que  $\mathbf{I} - \mathbf{G}(1)\mathbf{Q}(1) = 0$ , por lo cual el factor  $(z-1)$  debe incluirse en (7.2.3) a fin de asegurar que la norma está bien definida [6].

Consideremos  $\mathbf{G}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$  y su porción triangular denotada como  $\mathbf{G}_t(z) \in \mathcal{S}_t$ . Nótese que el hecho que  $\mathbf{G}_t(z)$  deba ser de tipo triangular inferior no es restrictivo ya que cualquier estructura triangular puede ser llevada a una de tipo  $\mathcal{S}_t$  mediante un reordenamiento apropiado de entradas y salidas.

El procedimiento propuesto consiste en diseñar un controlador triangular  $\mathbf{C}_{t\text{opt}}(z)$  óptimo para el modelo triangular  $\mathbf{G}_t(z)$ . Luego, la calidad del lazo cerrado en torno a  $\mathbf{G}(z)$  con  $\mathbf{C}_{t\text{opt}}(z)$  en términos de estabilidad y desempeño puede ser ajustada, como se verá más adelante, con elecciones apropiadas de la matriz de ponderación  $\mathbf{W}(z)$ . En la próxima sección se obtiene una forma explícita para  $\mathbf{C}_{t\text{opt}}(z)$  y en la subsiguiente, se estudia la aplicación de dicho controlador a la planta  $\mathbf{G}(z)$ .

### 7.3. Diseño óptimo triangular para plantas triangulares

A continuación se expone un resultado parcial que es de utilidad para derivar el resultado principal de esta sección.

#### Lema 7.2 (Controlador óptimo centralizado con ponderación escalar)

Sea  $\mathbf{G}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$  sin ceros sobre la circunferencia unitaria y  $W(z)$  una función escalar, estable, bipropia y de FM. Considérese el funcional definido en (7.2.3), entonces

$$\mathbf{Q}_{\text{opt}}(z) = \arg \min_{\mathbf{Q}(z) \in \mathcal{RH}_\infty} J(\mathbf{G}, W) \quad (7.3.1)$$

$$= \left( \tilde{\mathbf{G}}(z)W(z) \right)^{-1} \left\{ [\xi_{\mathbf{G}}(z)W(z)]_{\perp} \Big|_{z=1} + [\xi_{\mathbf{G}}(z)W(z)]_2 \right\} \quad (7.3.2)$$

donde  $\tilde{\mathbf{G}}(z) = \xi_{\mathbf{G}}(z)\mathbf{G}(z)$  con  $\xi_{\mathbf{G}}(z)$  el GLUI de  $\mathbf{G}(z)$  y  $[\cdot]_2$  ( $[\cdot]_{\perp}$ ) denota la porción del argumento en  $\mathcal{RH}_2$  ( $\mathcal{RH}_2^{\perp}$ ).

**Demostración:**

De acuerdo a (7.2.3) e introduciendo el GLUI de la planta el funcional puede escribirse como

$$J = \left\| \frac{1}{z-1} (W(z)\mathbf{I} - \mathbf{G}(z)W(z)\mathbf{Q}(z)) \right\|_2^2. \quad (7.3.3)$$

$$= \left\| \frac{1}{z-1} (\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{G}}(z)W(z) - \tilde{\mathbf{G}}(z)W(z)\mathbf{Q}(z)) \right\|_2^2. \quad (7.3.4)$$

en donde se ha usado el hecho que  $W(z)$  es escalar y  $\tilde{\mathbf{G}}(z) = \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{G}}(z)\mathbf{G}(z)$ . Luego, si se realiza una descomposición ortogonal del producto  $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{G}}(z)W(z)$  como aquella en (2.3.1), se tiene

$$\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{G}}(z)W(z) = [\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{G}}(z)W(z)]_{\perp} + [\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{G}}(z)W(z)]_2. \quad (7.3.5)$$

Entonces, (7.3.4) puede expresarse de la siguiente manera

$$J = \left\| \underbrace{\frac{[\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{G}}(z)W(z)]_{\perp} - [\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{G}}(z)W(z)]_{\perp}|_{z=1}}{z-1}}_{\in \mathcal{RH}_2^{\perp}} + \underbrace{\frac{[\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{G}}(z)W(z)]_{\perp}|_{z=1} + [\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{G}}(z)W(z)]_2 - \tilde{\mathbf{G}}(z)W(z)\mathbf{Q}(z)}{z-1}}_{\mathcal{RH}_2}} \right\|_2^2 \quad (7.3.6)$$

$$= \left\| \frac{[\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{G}}(z)W(z)]_{\perp} - [\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{G}}(z)W(z)]_{\perp}|_{z=1}}{z-1} \right\|_2^2 + \left\| \frac{[\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{G}}(z)W(z)]_{\perp}|_{z=1} + [\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{G}}(z)W(z)]_2 - \tilde{\mathbf{G}}(z)W(z)\mathbf{Q}(z)}{z-1} \right\|_2^2, \quad (7.3.7)$$

en donde se ha incluido el término  $[\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{G}}(z)W(z)]_{\perp}|_{z=1}$  a fin de asegurar que el primer término esté bien definido. Como  $W(z)$  es bipropio y de FM, entonces también lo es  $\tilde{\mathbf{G}}(z)W(z)$  y además  $(\tilde{\mathbf{G}}(z)W(z))^{-1} \in \mathcal{RH}_{\infty}$ . Luego, el parámetro de Youla que minimiza  $J$  es tal que anula el segundo término de la última expresión, es decir

$$\mathbf{Q}_{opt}(z) = (\tilde{\mathbf{G}}(z)W(z))^{-1} \{ [\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{G}}(z)W(z)]_{\perp}|_{z=1} + [\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{G}}(z)W(z)]_2 \} \in \mathcal{RH}_{\infty}, \quad (7.3.8)$$

y el resultado procede.

□□□

El lema recién expuesto entrega la solución óptima no restringida al problema de minimizar la norma 2 de la función sensibilidad ponderada por una función escalar.

En la minimización del funcional  $J(\mathbf{G}, \mathbf{W})$ , podemos pensar en elegir la matriz de ponderación  $\mathbf{W}(z)$  diagonal, de modo tal que ésta pondere la función de sensibilidad por canal. Con esta elección, el resultado del Lema 7.2 puede ser empleado para dar solución al problema de optimización con restricción estructural en  $\mathbf{Q}(z)$  asociado a la porción triangular de la planta. Esto queda de manifiesto en el siguiente teorema, que constituye la base del procedimiento de diseño propuesto.

**Teorema 7.1 (Controlador óptimo triangular con ponderación por canal)**

Sea  $\mathbf{G}_t(z) \in \mathcal{RH}_\infty \cap \mathcal{S}_t$  sin ceros sobre la circunferencia unitaria y  $\mathbf{W}(z) = \text{diag}\{W_1(z), W_2(z), \dots, W_n(z)\}$  estable, bipropia, de FM y tal que  $W_i(z)$  es escalar  $\forall i = 1, 2, \dots, n$ . Defínase  $\mathbf{Q}_{i \text{ opt}}(z)$  como la solución no restringida del problema de optimización del Lema 7.2 usando el funcional  $J(\mathbf{G}_i, W_i)$  y donde  $\mathbf{G}_i(z)$  es la submatriz  $i$  (ver definición 6.1 en la pág. 83) de  $\mathbf{G}_t(z)$ , es decir

$$\mathbf{Q}_{i \text{ opt}}(z) = \arg \min_{\mathbf{Q}(z) \in \mathcal{RH}_\infty} J(\mathbf{G}_i, W_i). \quad (7.3.9)$$

Entonces

$$\mathbf{Q}_{t \text{ opt}}(z) = \arg \min_{\mathbf{Q}(z) \in \mathcal{RH}_\infty \cap \mathcal{S}_t} J(\mathbf{G}_t, \mathbf{W}) \quad (7.3.10)$$

$$= \sum_{i=1}^n \text{diag}\{\mathbf{0}_{i-1}, \mathbf{Q}_{i \text{ opt}}(z)\} \mathbf{1}_{ii}, \quad (7.3.11)$$

donde la matriz  $\mathbf{1}_{ii} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  tiene todos sus elementos nulos, salvo el elemento  $(i, i)$ , en el cual tiene un uno.

**Demostración:**

Con la propiedad (A.3.8) de la norma 2 y aprovechando el hecho que  $\mathbf{W}(z)$  es diagonal,  $J(\mathbf{G}, \mathbf{W})$  puede expresarse en forma vectorizada como

$$J(\mathbf{G}, \mathbf{W}) = \left\| \frac{\boldsymbol{\Lambda} - \mathbf{G}_A(z) \mathbf{Q}_{vec}(z)}{z - 1} \right\|_2^2, \quad (7.3.12)$$

donde

$$\mathbf{\Lambda}(z) = \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_1(z) & \mathbf{\Lambda}_2(z) & \cdots & \mathbf{\Lambda}_n(z) \end{bmatrix}^T, \quad (7.3.13)$$

$$\mathbf{Q}_{vec}(z) = \begin{bmatrix} Q_{11}(z) & Q_{21}(z) & \cdots & Q_{n1}(z) & Q_{22}(z) & Q_{32}(z) & \cdots & Q_{n2}(z) & \cdots & Q_{nn}(z) \end{bmatrix}^T, \quad (7.3.14)$$

$$\mathbf{G}_A(z) = \text{diag} \{ \mathbf{G}_1(z)W_1(z), \mathbf{G}_2(z)W_2(z), \dots, \mathbf{G}_n(z)W_n(z) \}, \quad (7.3.15)$$

y  $\mathbf{\Lambda}_i(z) = W_i(z)e_1^{n-i+1}$ . Es importante notar que de acuerdo a la definición de  $\mathbf{Q}_{vec}(z)$  en (7.3.14), en la vectorización hecha en (7.3.12) se ha considerado en forma implícita el hecho que  $\mathbf{Q}(z) \in \mathcal{S}_t$ . De este modo, (7.3.12) permite separar del problema de optimización (7.3.10) en  $n$  problemas de menor dimensión e independientes entre si. En efecto, se tiene que

$$J(\mathbf{G}, \mathbf{W}) = \sum_{i=1}^n \left\| \left( \mathbf{\Lambda}_i(z) - \mathbf{G}_i(z)W_i(z)\mathbf{Q}_{vec}^i(z) \right) \frac{1}{z-1} \right\|_2^2 \quad (7.3.16)$$

donde  $\mathbf{Q}_{vec}^i(z) \in \mathbb{C}^{(n-i+1) \times 1}$  es un vector que contiene los elementos no nulos de la  $i$ -ésima columna de  $\mathbf{Q}(z)$ , es decir

$$\mathbf{Q}_{vec}^i(z) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times (i-1)} & Q_{ii}(z) & Q_{(i+1),i}(z) & \cdots & Q_{ni}(z) \end{bmatrix}^T. \quad (7.3.17)$$

Como  $\mathbf{\Lambda}_i(z) \in \mathcal{RH}_2, \forall i = 1, 2, \dots, n$ , se puede efectuar un procedimiento similar al hecho en la demostración del Lema 7.2 en cada uno de los sumandos de (7.3.16). De hecho, incorporando el GLUI  $\xi_{\mathbf{G}_i}(z)$  de cada submatriz  $\mathbf{G}_i(z)$  y realizando las descomposiciones ortogonales pertinentes se obtiene

$$J(\mathbf{G}, \mathbf{W}) = \sum_{i=1}^n \left\| \left( \xi_{\mathbf{G}_i}(z)\mathbf{\Lambda}_i(z) - \tilde{\mathbf{G}}_i(z)W_i(z)\mathbf{Q}_{vec}^i(z) \right) \frac{1}{z-1} \right\|_2^2 \quad (7.3.18)$$

$$= \sum_{i=1}^n \left\{ \left\| \frac{[\xi_{\mathbf{G}_i}(z)\mathbf{\Lambda}_i(z)]_{\perp} - [\xi_{\mathbf{G}_i}(z)\mathbf{\Lambda}_i(z)]_{\perp}|_{z=1}}{z-1} \right\|_2^2 + \left\| \frac{[\xi_{\mathbf{G}_i}(z)\mathbf{\Lambda}_i(z)]_{\perp}|_{z=1} + [\xi_{\mathbf{G}_i}(z)\mathbf{\Lambda}_i(z)]_2 - \tilde{\mathbf{G}}_i(z)W_i(z)\mathbf{Q}_{vec}^i(z)}{z-1} \right\|_2^2 \right\} \quad (7.3.19)$$

donde  $\tilde{\mathbf{G}}_i(z) = \xi_{\mathbf{G}_i}(z)\mathbf{G}_i(z)$ . En la última expresión, cada término de la sumatoria puede ser optimizado por separado de modo tal que si  $\mathbf{Q}_{vec}^{i,opt}(z)$  minimiza el  $i$ -ésimo término de (7.3.19), entonces minimiza el segundo sumando de éste. Además, como el producto

$\tilde{\mathbf{G}}_i(z)W_i(z)$  es bipropio y de FM, entonces  $(\tilde{\mathbf{G}}_i(z)W_i(z))^{-1} \in \mathcal{RH}_\infty$  y por ende

$$\mathbf{Q}_{vec\ opt}^i(z) = (\tilde{\mathbf{G}}_i(z)W_i(z))^{-1} \{ [\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{G}_i}(z)\boldsymbol{\Lambda}_i(z)]_{\perp}|_{z=1} + [\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{G}_i}(z)\boldsymbol{\Lambda}_i(z)]_2 \} \in \mathcal{RH}_\infty \quad (7.3.20)$$

Reemplazando la definición de  $\boldsymbol{\Lambda}_i(z)$  en lo anterior se reconoce el resultado del Lema 7.2 como

$$\mathbf{Q}_{vec\ opt}^i(z) = (\tilde{\mathbf{G}}_i(z)W_i(z))^{-1} \{ [\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{G}_i}(z)W_i(z)e^{n-i+1}]_{\perp}|_{z=1} + [\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{G}_i}(z)W_i(z)e^{n-i+1}]_2 \} \quad (7.3.21)$$

$$= (\tilde{\mathbf{G}}_i(z)W_i(z))^{-1} \{ [\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{G}_i}(z)W_i(z)]_{\perp}|_{z=1} + [\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{G}_i}(z)W_i(z)]_2 \} e^{n-i+1} \quad (7.3.22)$$

$$\Rightarrow \mathbf{Q}_{vec\ opt}^i(z) = \mathbf{Q}_{i\ opt}(z)e^{n-i+1}, \quad (7.3.23)$$

donde

$$\mathbf{Q}_{i\ opt}(z) = \arg \min_{\mathbf{Q}(z) \in \mathcal{RH}_\infty} J(\mathbf{G}_i, W_i). \quad (7.3.24)$$

Finalmente, el parámetro de Youla triangular óptimo,  $\mathbf{Q}_{t\ opt}(z)$ , se reconstruye de manera simple ordenando apropiadamente los vectores  $\mathbf{Q}_{vec\ opt}^i(z)$  como

$$\mathbf{Q}_{t\ opt} = \sum_{i=1}^n \text{diag} \{ \mathbf{0}_{i-1}, \mathbf{Q}_{i\ opt}(z) \} \mathbf{1}_{ii} \in \mathcal{RH}_\infty, \quad (7.3.25)$$

y el resultado procede. □□□

El teorema anterior permite diseñar controladores triangulares con integración<sup>1</sup> que minimizan la norma 2 de la sensibilidad ponderada por canal en lazos con plantas estables y triangulares. Si bien el resultado es formalmente completo, para efectos de diseño resulta más útil disponer de un procedimiento algorítmico. En efecto, aprovechando la forma de (7.3.11), el resultado del Teorema 7.1 se puede condensar en el siguiente procedimiento.

#### Procedimiento 1 (Diseño óptimo triangular para planta triangular)

Considérese las condiciones y el enunciado del Teorema 7.1. Sea  $i = 1$ :

(1) Usando el Lema 7.2 calcular

$$\mathbf{Q}_{i\ opt}(z) = \arg \min_{\mathbf{Q}(z) \in \mathcal{RH}_\infty} J(\mathbf{G}_i, W_i). \quad (7.3.26)$$

<sup>1</sup>El controlador tiene integración en forma garantizada ya que  $\mathbf{Q}_{t\ opt}(1) = \mathbf{G}_t^{-1}(1)$ .

(II) Denotar la primera columna  $\mathbf{Q}_{i \text{ opt}}(z)$  como  $[\mathbf{Q}_{i \text{ opt}}(z)]_{*1}$  y asignar dicha columna a la  $i$ -ésima correspondiente de  $\mathbf{Q}_{t \text{ opt}}(z)$  procurando agregar los elementos nulos necesarios para que  $\mathbf{Q}_{t \text{ opt}}(z) \in \mathcal{S}_t$ , es decir

$$[\mathbf{Q}_{t \text{ opt}}(z)]_{*i} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(i-1) \times 1} \\ [\mathbf{Q}_{i \text{ opt}}(z)]_{*1} \end{bmatrix} \quad (7.3.27)$$

(III) Repetir los pasos anteriores para  $i = \{2, 3, \dots, n\}$ .

La forma de (7.3.11) y el Procedimiento 1, ponen de manifiesto que el óptimo triangular se construye en términos de los óptimos no restringidos para cada submatriz con un funcional con ponderación escalar. De hecho, tener que minimizar sin restricciones estructurales el funcional  $J(\mathbf{G}_i, W_i)$  en cada paso del Procedimiento 1 implica que el problema de optimización restringido se descompone en  $n$  problemas de optimización no restringidos. Esto es un resultado muy interesante que se visualiza sólo gracias a que se ha considerado un procedimiento analítico explícito para la resolución del problema.

Además, el Procedimiento 1 deja en evidencia la secuencialidad implícita que hay en la solución al problema de optimización restringido. En el capítulo anterior se hizo un análisis intuitivo de los rasgos de secuencialidad que tiene la solución al problema de optimización asociado al tema de límites de desempeño. Se puede notar que  $J(\mathbf{G}_t, \mathbf{I}) = J$ , es decir, que si se considera  $\mathbf{W}(z) = \mathbf{I}$  en el Teorema 7.1 entonces se recupera el problema de optimización de límites de desempeño. Luego, la secuencialidad del Procedimiento 1 está íntimamente relacionada con lo discutido en el capítulo anterior. En efecto, de acuerdo a (7.3.11) se tiene que

$$[\mathbf{Q}_{t \text{ opt}}(z)]_{nn} = \mathbf{Q}_{n \text{ opt}}(z) \quad (7.3.28)$$

$$= \arg \min_{\mathbf{Q}(z) \in \mathcal{RH}_\infty} J(\mathbf{G}_n, W_n). \quad (7.3.29)$$

Como  $\mathbf{G}_n(z) = G_{nn}(z)$  es un escalar, entonces el resultado indica que  $[\mathbf{Q}_{t \text{ opt}}(z)]_{nn}$  debe ser diseñado pensando en un lazo SISO en torno a  $G_{nn}(z)$ . Esta propiedad de la solución se opone a las técnicas clásicas de diseño secuencial [63–66], que indican que la secuencia de diseño debe comenzar en sentido inverso, esto es, se debe diseñar  $[\mathbf{Q}_{t \text{ opt}}(z)]_{11}$  pensando en un lazo SISO en torno a  $G_{11}(z)$ . Para más comentarios respecto a esto se remite al lector a la pág. 88.

## 7.4. Control triangular de planta centralizada

En esta sección se estudia la aplicación del controlador triangular óptimo definido por  $\mathbf{Q}_{t \text{ opt}}(z)$  de la sección anterior a la planta  $\mathbf{G}(z)$  estable que no es necesariamente estruc-

turada. Defínase  $\mathbf{C}_{t \text{ opt}}(z) \in \mathcal{S}_t$  como el controlador que genera el diseño nominal en base al modelo triangular  $\mathbf{G}_t(z)$  de la planta, es decir

$$\mathbf{C}_{t \text{ opt}}(z) = \mathbf{Q}_{t \text{ opt}}(z) (\mathbf{I} - \mathbf{G}_t(z) \mathbf{Q}_{t \text{ opt}}(z))^{-1}. \quad (7.4.1)$$

El parámetro de Youla que define a  $\mathbf{C}_{t \text{ opt}}(z)$  en el lazo en torno a  $\mathbf{G}(z)$  se puede escribir como

$$\mathbf{Q}_{f \text{ opt}}(z) = \mathbf{C}_{t \text{ opt}}(z) (\mathbf{I} + \mathbf{G}(z) \mathbf{C}_{t \text{ opt}}(z))^{-1} \quad (7.4.2)$$

Reemplazando (7.4.1) en la última expresión resulta

$$\mathbf{Q}_{f \text{ opt}}(z) = (\mathbf{Q}_{t \text{ opt}}^{-1}(z) + \mathbf{G}(z) - \mathbf{G}_t(z))^{-1} \quad (7.4.3)$$

Esta última relación es coherente con lo expuesto en el Lema 7.1 y pone de manifiesto la condición (7.2.2), a saber, para garantizar que  $\mathbf{C}_{t \text{ opt}}(z) \in \mathcal{S}_t$  se debe forzar que los términos fuera de la porción triangular de  $\mathbf{Q}_{t \text{ opt}}^{-1}(z)$  sean idénticos a los correspondientes en  $\mathbf{G}(z)$ . Además, (7.4.3) indica que, si  $\mathbf{Q}_{t \text{ opt}}(z)$  genera un controlador con integración, entonces  $\mathbf{Q}_{f \text{ opt}}(z)$  también lo hará. Por otro lado, también se deja en evidencia una dificultad no menor existente en el control triangular de plantas centralizadas, a saber, a pesar que  $\mathbf{Q}_{t \text{ opt}}(z)$  es estable y propio, (7.4.3) indica que  $\mathbf{Q}_{f \text{ opt}}(z)$  no necesariamente lo es y, por ende, no asegura la estabilidad del lazo.

Un primer acercamiento al problema sería estudiar las condiciones bajo las cuales el controlador óptimo de la sección anterior garantiza, al menos, la estabilidad del lazo. Metodologías para efectuar dicho análisis de robustez pueden ser encontradas en [7, 14, 15] y, en general, permiten obtener condiciones suficientes sobre  $\mathbf{Q}_{t \text{ opt}}(z)$  respecto de las dinámicas no consideradas en el modelo  $\mathbf{G}_t(z)$ , es decir la porción triangular superior estricta de  $\mathbf{G}(z)$ , bajo las cuales se garantiza la estabilidad del lazo. Estas condiciones en general son excesivamente conservadoras en términos del ancho de banda necesario para asegurar estabilidad y no son consideradas en este trabajo.

Supóngase que mediante el uso del Teorema 7.1 con  $\mathbf{W}(z) = \mathbf{I}$  se diseña cierto  $\mathbf{Q}_{t \text{ opt}}(z)$  basado en el modelo triangular  $\mathbf{G}_t(z)$  de una planta  $\mathbf{G}(z) \in \mathcal{RH}_2$  y que el controlador asociado genera un lazo inestable al ser aplicado sobre  $\mathbf{G}(z)$ . Es conocido [6, 7] que si la planta es estable, solucionar este inconveniente pasa por reducir el ancho de banda del diseño, es decir, cambiar la dinámica de  $\mathbf{Q}_{t \text{ opt}}(z)$  de manera tal que el lazo asociado sea de menor velocidad. Esto justamente se puede conseguir con los resultados de la sección anterior mediante la elección apropiada de la matriz de ponderación  $\mathbf{W}(z)$ . Examinando la forma de (7.3.2) y (7.3.11) se puede notar que todos los ceros de  $\mathbf{W}(z)$  son polos de  $\mathbf{Q}_{t \text{ opt}}(z)$ , por lo que una forma conveniente para los elementos de  $\mathbf{W}(z)$  en el Teorema 7.1

es

$$W_i(z) = \frac{z - a_i}{z(1 - a_i)}, \quad (7.4.4)$$

donde  $a_i \in [0, 1[$  e  $i = 1, 2, \dots, n$ . Esta forma de la matriz de ponderación permite reducir el ancho de banda del diseño por canal ajustando el valor de  $a_i$  suficientemente cerca de  $z = 1$ .

La discusión anterior se puede condensar en el siguiente procedimiento de diseño.

**Procedimiento 2 (Diseño triangular para planta centralizada)**

Considérese las condiciones y el enunciado del Teorema 7.1 con  $\mathbf{G}_t(z)$  la porción triangular de la planta  $\mathbf{G}(z)$ ,  $\mathbf{W}(z) = \text{diag}\{W_1(z), W_2(z), \dots, W_n(z)\}$ , y  $W_i(z)$  de la forma (7.4.4) con  $a_i \in [0, 1[$ .

- (i) Calcular  $\mathbf{Q}_{t \text{ opt}}(z)$  de acuerdo a (7.3.11).
- (ii) Estudiar la estabilidad y desempeño del lazo generado por el controlador  $\mathbf{C}_{t \text{ opt}}(z)$  y  $\mathbf{G}(z)$ . Si el resultado es satisfactorio el procedimiento termina. En caso contrario, repetir el paso (i) con  $\mathbf{W}(z)$  de la forma (7.4.4) y eligiendo las constantes  $a_i$  sucesivamente más cercanas a  $z = 1$  hasta obtener dinámicas aceptables.

Las ideas recién expuestas se asemejan a los procedimientos de diseño expuestos en [7] y se ejemplifican a continuación para el caso de un sistema  $2 \times 2$ .

**Ejemplo 7.1:** Considérese un sistema descrito por su matriz de transferencia

$$\mathbf{G}(z) = \begin{bmatrix} \frac{z - 1.5}{z^2(z - 0.9)} & \frac{-0.25(z - 5)}{z^2} \\ \frac{z - 1.7}{z(z - 0.9)} & \frac{1}{z - 0.9} \end{bmatrix}. \quad (7.4.5)$$

La Matriz de Participación (MP) [34] de este sistema es

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0.23 & 0.05 \\ 0.32 & 0.4 \end{bmatrix}, \quad (7.4.6)$$

de modo tal que si se desea restringir la estructura del control, una arquitectura triangular es muy recomendable. El modelo triangular asociado es

$$\mathbf{G}_t(z) = \begin{bmatrix} \frac{z - 1.5}{z^2(z - 0.9)} & 0 \\ \frac{z - 1.7}{z(z - 0.9)} & \frac{1}{z - 0.9} \end{bmatrix}. \quad (7.4.7)$$

En primera instancia podemos elegir  $a_1 = a_2 = 0$ , de modo tal que  $\mathbf{W}(z) = \mathbf{I}$  y el uso del Teorema 7.1 entrega

$$\mathbf{Q}_{t \text{ opt0}} = \begin{bmatrix} \frac{-0.67(z-0.9)}{(z-0.6667)} & 0 \\ \frac{0.67(z-1.7)(z-0.9)}{z(z-0.67)} & \frac{(z-0.9)}{z} \end{bmatrix}. \quad (7.4.8)$$

El parámetro de Youla que genera el controlador triangular en el lazo en torno a  $\mathbf{G}(z)$  se calcula usando (7.4.3) como

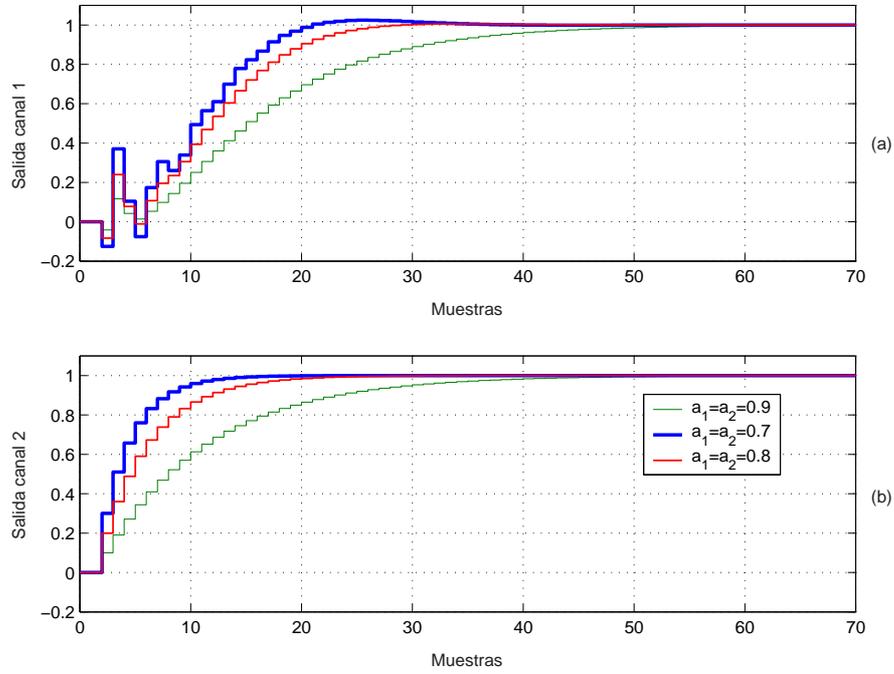
$$\mathbf{Q}_{f \text{ opt0}}(z) = \begin{bmatrix} -0.67z^3(z-0.9) & -0.167(z-5)(z-0.9)^2 \\ 0.67z^2(z-1.7)(z-0.9) & z^2(z-0.67)(z-0.9) \end{bmatrix} \frac{1}{p_{f0}(z)}, \quad (7.4.9)$$

con

$$p_{f0}(z) = (z^2 - 1.615z + 0.6947)(z^2 + 0.7821z + 1.835). \quad (7.4.10)$$

Se puede notar a partir de la expresión para  $\mathbf{Q}_{f \text{ opt0}}(z)$  que el lazo construido en torno a  $\mathbf{G}(z)$  con el controlador triangular  $\mathbf{C}_{t \text{ opt0}}(z)$  es inestable<sup>2</sup>. Se requiere entonces hacer modificaciones al diseño original a fin de conseguir estabilidad en el lazo. Para reducir el ancho de banda del diseño, se eligen matrices de ponderación  $\mathbf{W}(z)$  con elementos de la forma dada en (7.4.4) para  $a_1 = a_2 = \{0.7, 0.8, 0.9\}$  y se aplica el Teorema 7.1. El lazo resulta estable para los tres valores de  $a$  elegidos y en la Fig. 7.1 se exponen las respuestas a escalón unitario por canal de éste.

<sup>2</sup>Nótese que esto ocurre a pesar que la interacción de  $G_{12}(z)$  medida en términos de la MP es muy pequeña.



**Figura 7.1.** Respuesta a escalón unitario de lazo restringido en estructura para distintas matrices de ponderación: (a)  $y_1(t)$ , (b)  $y_2(t)$ .

A modo de ejemplo, el parámetro de Youla triangular asociado a  $a_1 = a_2 = 0.7$  es

$$\mathbf{Q}_{t \text{ opt } 0.7}(z) = \begin{bmatrix} \frac{-0.2z(z-0.9)}{(z-0.7)(z-0.6667)} & 0 \\ \frac{0.2(z-1.7)(z-0.9)}{(z-0.7)(z-0.6667)} & \frac{0.3(z-0.9)}{(z-0.7)} \end{bmatrix}, \quad (7.4.11)$$

y el parámetro de Youla que genera al controlador triangular en el lazo en torno a  $\mathbf{G}(z)$  se obtiene usando (7.4.3) como

$$\mathbf{Q}_{f \text{ opt } 0.7}(z) = \begin{bmatrix} -0.2z(z+0.0001286)^2(z-0.9) & \frac{-0.015z(z-5)(z-0.9)^2}{(z-0.7)} \\ 0.2(z-0.9)(z-1.7)z^2 & \frac{0.3(z-0.6667)(z-0.9)z^2}{(z-0.7)} \end{bmatrix} \frac{1}{p_{f0.7}(z)}, \quad (7.4.12)$$

donde

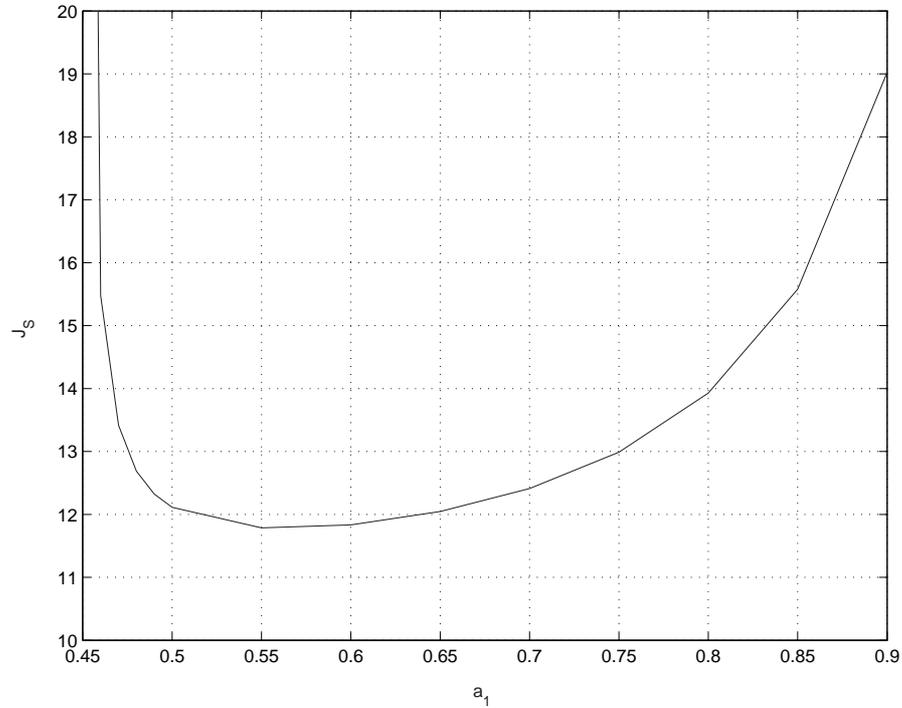
$$p_{f0.7}(z) = (z^2 - 1.659z + 0.7069)(z^2 + 0.242z + 0.5411). \quad (7.4.13)$$

Diversas pruebas por simulación muestran que el lazo resulta estable si  $a_1 = a_2 > 0.45$ , no

obstante, la dependencia del desempeño del lazo con respecto al parámetro  $a$  no es clara. Por esta razón, a modo de comparación definamos el criterio

$$J_S = \left\| \left( \mathbf{I} - \mathbf{G}(z) \mathbf{Q}_{f \text{ opt}}(z) \right) \frac{1}{z-1} \right\|_2^2, \quad (7.4.14)$$

donde  $\mathbf{Q}_{f \text{ opt}}(z)$  es el parámetro de Youla en (7.4.3) que parametriza al controlador triangular en el lazo en torno a  $\mathbf{G}(z)$ . La Fig. 7.2 muestra el comportamiento de  $J_S$  en función de la elección de  $a_1 = a_2$ .



**Figura 7.2.** Medida  $J_S$  en función del parámetro  $a_1 = a_2$ .

El resultado de la Fig. 7.2 indica que existe un valor óptimo en la elección de  $a$  que garantiza que la norma 2 de la función de sensibilidad del lazo es mínima. Hasta el momento, esto sólo ha podido apreciarse a partir de la evaluación numérica de  $J_S$  y no se tiene una expresión analítica que exponga la dependencia de  $J_S$  con respecto al parámetro de diseño  $a_1 = a_2$ . ■

El procedimiento expuesto puede entregar bastante libertad en el diseño. En efecto, tal como se menciona previamente, la elección de  $\mathbf{W}(z)$  en la optimización puede realizarse con distintos criterios en función de lo que se quiera conseguir en cada canal de salida de la

planta. El siguiente ejemplo pone énfasis en este tópico.

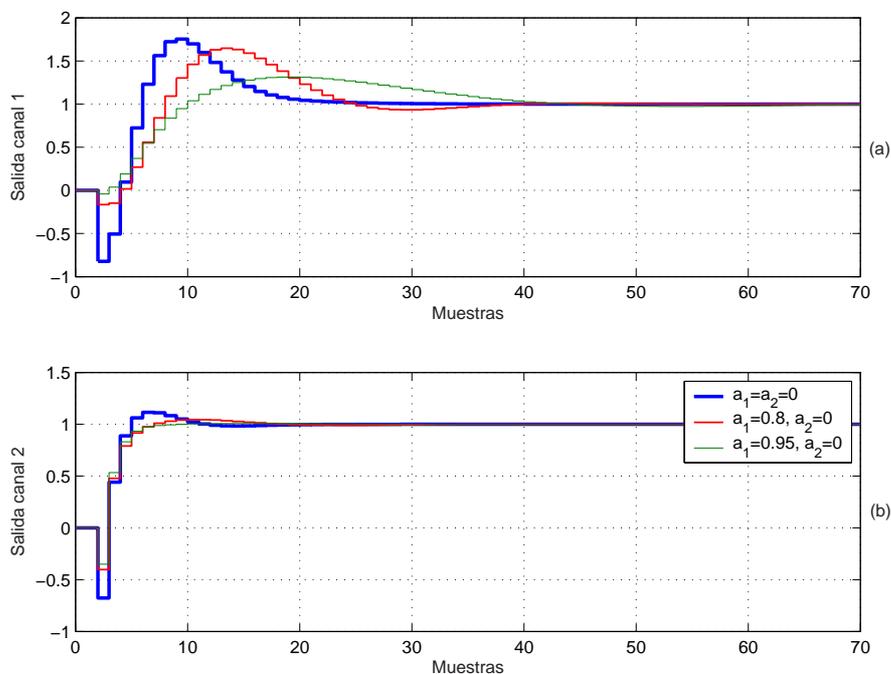
**Ejemplo 7.2:** *Considérese una planta descrita por*

$$\mathbf{G}(z) = \begin{bmatrix} \frac{(z-1.1)}{(z-0.6)^2} & \frac{0.16}{(z-0.6)^2} \\ \frac{1}{z^2} & \frac{-0.5(z-3)}{z^2} \end{bmatrix}, \quad (7.4.15)$$

cuya MP es

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0.29 & 0.05 \\ 0.20 & 0.46 \end{bmatrix}, \quad (7.4.16)$$

y tiene dos ceros FNM finitos en  $z = 2.813$  y  $z = 1.29$ . Si se elige  $\mathbf{W}(z) = \mathbf{I}$  en el Teorema 7.1, el controlador obtenido genera un lazo estable en torno a  $\mathbf{G}(z)$ . A pesar de esto, tal y como se aprecia en la Fig. 7.3(a) en línea gruesa, el desempeño del primer canal del lazo es deficiente en términos de undershoot y overshoot. Una alternativa para mejorar la situación es incluir una matriz de ponderación  $\mathbf{W}(z)$  en el diseño que pondere sólo el canal con mal desempeño. Esto se logra eligiendo  $a_1 \neq 0$  y  $a_2 = 0$ . Los nuevos diseños resultan satisfactorios y en la Fig. 7.3 se muestran las respuestas del lazo para distintas elecciones de  $a_1$ . Nótese que debido a la interacción de la planta, a pesar que en el diseño sólo se pondera el canal 1, el controlador asociado también altera el desempeño en el canal 2.



**Figura 7.3.** Respuesta a escalón unitario del lazo restringido en estructura para distintas elecciones de  $a_1$ : (a)  $y_1(t)$ , (b)  $y_2(t)$ .

■

## 7.5. Conclusiones

En este capítulo se ha propuesto un método de diseño de controladores triangulares para plantas estables. La metodología se basa en el diseño de un controlador triangular óptimo para un modelo triangular de la planta. La optimalidad del controlador se pierde al cerrar un lazo en torno a la planta centralizada e, incluso, es posible que no se preserve la estabilidad. No obstante, mediante el ajuste de una función de ponderación en el problema de optimización, se puede manejar el ancho de banda del diseño conseguido y así conseguir estabilidad junto con un desempeño acorde a los requerimientos de diseño. La forma explícita de la función de ponderación se entrega en términos de un conjunto de parámetros de diseño que permiten regular el ancho de banda en cada canal del lazo.

La resolución del problema de optimización asociado usa una extensión de los procedimientos empleados en el capítulo anterior para el cómputo de límites de desempeño en control restringido. Las principales ventajas del método propuesto son su naturaleza explícita, simplicidad de uso y la posibilidad de incorporar criterios de diseño para ajustar

---

el ancho de banda del lazo. Además, dado que en la literatura actual no existen procedimientos analíticos de diseño de controladores triangulares para plantas centralizadas, esta metodología es una contribución clara al tema. Finalmente, su principal limitación radica en el hecho que el problema de optimización no considera la naturaleza centralizada de la planta, por lo que el diseño es inherentemente subóptimo. Esto a su vez puede causar que para conseguir estabilidad se deba recurrir a reducciones excesivas del ancho de banda del diseño.

# CONCLUSIONES

En este capítulo se resaltan a modo de síntesis los resultados principales de este trabajo de tesis y sus implicancias más importantes. Una discusión más acabada sobre cada uno de ellos puede encontrarse en las conclusiones del capítulo respectivo. Además, se entregan líneas generales de los temas abiertos que se desprenden de este trabajo y las direcciones que debieran tener trabajos de investigación futuros.

### Discusión de resultados principales

Esta tesis se inscribe dentro del contexto de sistemas de control MIMO digital con estructura restringida. No obstante, el trabajo de investigación realizado tiene algunos aspectos que escapan al tema medular, por lo que a continuación se enumeran las conclusiones correspondientes clasificadas apropiadamente.

#### ▪ Parametrización de controladores

En la literatura actual existen dos formulaciones de la conocida parametrización de Youla de los controladores estabilizantes y realizables. Éstas han sido empleadas con éxito tanto en el diseño de sistemas de control como en la obtención de propiedades importantes de esquemas de realimentación. Si se considera el caso en que la planta en cuestión es inestable, ambos planteamientos adolecen del problema de requerir de la disponibilidad de un controlador o función de sensibilidad que describa un lazo estable y realizable. Esto puede traer complicaciones debido a que para cierta clase de sistemas, el procedimiento para obtener un diseño apropiado puede ser una tarea laboriosa en sí misma.

Es así como en esta tesis se sobrelleva este inconveniente mediante la derivación de un forma explícita de una función de sensibilidad complementaria MIMO que puede ser computada por inspección de los rasgos dinámicos de la planta que imponen limitaciones fundamentales (ceros de fase no mínima y polos inestables). Esto simplifica considerablemente la parametrización de todos los controladores (o funciones de sensibilidad) que generan lazos estables y realizables ya que evita tener que ocupar algún

procedimiento de diseño previo. Un elemento clave para la obtención de dicha función de sensibilidad complementaria es la noción de esencialidad, asociada a la identificación de cuáles son los rasgos estrictamente necesarios que ésta debe tener para asegurar la admisibilidad del lazo. La forma analítica entregada es válida para un subconjunto de plantas lineales, pero éste es suficientemente amplio como para abarcar gran parte de los modelos que usualmente aparecen en procesos industriales.

Un ejemplo SISO ilustrativo deja de manifiesto la potencial utilidad de esta herramienta para obtener la solución explícita de una clase importante de problemas de optimización cuadrática.

#### ■ Factorizaciones de ceros en sistemas MIMO

Dentro de las formas que se tiene de realizar factorizaciones de ceros en sistemas MIMO, los interactores unitarios son de gran relevancia ya que poseen propiedades analíticas útiles para la resolución de una clase amplia de problemas de optimización cuadrática. En este trabajo se demuestra que el interactor unitario de ceros generalizado es único y, además, se entrega una caracterización simple de todas aquellas matrices de transferencia que poseen interactor unitario diagonal.

Esto último es de importancia en varias áreas del análisis y síntesis de esquemas de control lineal. En particular, en este escrito se deja de manifiesto que esto tiene estricta relación con el hecho que, cuando una planta estructurada pertenece a una clase *estructuralmente cerrada bajo inversión*, el controlador centralizado óptimo que logra el mejor desempeño posible tiene la misma estructura de la planta en forma natural. Esto implica que si se restringe el control a aquella estructura, entonces el impacto sobre el desempeño óptimo es nulo. Esta propiedad se desprende de una característica especial que deben cumplir los ceros de fase no mínima de la planta y que lleva a definir el concepto de *cero de FNM canónico izquierdo*.

#### ■ Control MIMO de estructura restringida

Este tema es el principal abordado en este trabajo de tesis. Un resultado fundamental es la derivación de condiciones bajo las cuales la estructura impuesta sobre el controlador se traspaasa directamente al parámetro de Youla asociado. Se ha demostrado que una condición necesaria y suficiente para que esto ocurra es que el conjunto de restricciones sea estructuralmente cerrado bajo inversión y que la planta posea la misma estructura que aquella forzada sobre el controlador. Este hecho entrega una condición suficiente para garantizar la convexidad de una clase de problemas de optimización de tipo cuadrático y se aprovecha en dos tópicos:

- Límites de desempeño.

El deterioro en desempeño producto de las restricciones estructurales sobre el controlador es cuantificado en forma explícita para el caso de estructura diagonal por bloques, rala simple y triangular. Dicho deterioro es dependiente de la ubicación de los ceros de FNM que no son canónicos izquierdos y de ciertos rasgos direccionales que dan cuenta de dos elementos: (a) el nivel de interacción dinámica entre algunos subsistemas de la planta y, (b) cuán cerca está el cero de FNM de ser canónico izquierdo. Como es usual a la luz de resultados previos, los ceros de FNM más dañinos para el desempeño óptimo son aquellos ubicados cerca de  $z = 1$ . Sin embargo, una conclusión importante es que el efecto negativo de dichos ceros de FNM sobre el deterioro en el desempeño óptimo puede ser atenuado si dicho cero es cercano a ser canónico izquierdo. Este fenómeno de direccionalidad en la influencia del cero de FNM sobre el desempeño óptimo es un resultado notable ya que marca una diferencia rotunda respecto al caso de control centralizado, en donde éste depende única y exclusivamente de la ubicación de los ceros de FNM.

- Diseño de controladores triangulares.

Ante una evidente carencia en la literatura de métodos sistemáticos de diseño de controladores triangulares para plantas estables, en esta tesis se ha presentado un procedimiento para ello que posee varias ventajas considerables: (a) no requiere que la planta tenga una estructura en particular, (b) es de carácter explícito y (c) permite incorporar criterios de diseño. Este último aspecto se logra mediante el ajuste apropiado de una función de ponderación que permite reducir el ancho de banda del diseño por canal y, en definitiva, es lo que permite conseguir estabilidad y un desempeño apropiado en el lazo restringido.

El método se basa en el diseño óptimo de un controlador triangular para un modelo triangular de la planta, por lo que tiene la desventaja de no incorporar la naturaleza centralizada de la planta dentro del problema de optimización. Esto causa que, en ciertos casos, pueda requerirse reducir el ancho de banda de manera excesiva a fin de conseguir estabilidad en el lazo.

Finalmente, gracias a que el problema de optimización se resuelve en forma explícita, se detecta un rasgo de secuencialidad en la construcción de la solución. Esta propiedad recuerda los procedimientos clásicos de diseño secuencial, pero ciertamente sugiere un orden en la secuencia de diseño distinto.

## Líneas futuras de investigación

A partir de los resultados obtenidos, es claro que las líneas de investigación que deben suceder a este trabajo pueden ser varias:

- Hallar la forma explícita de la función de sensibilidad complementaria esencial para una planta general. Esto significa eliminar la suposición de polos inestables con multiplicidad algebraica simple y que ninguno de ellos coincide con algún cero de FNM. Además, se debería extender la idea de esencialidad a otras funciones de sensibilidad de interés a fin de que ciertos problemas de optimización tengan una solución más directa.
- A la luz de los resultados presentados respecto de límites de desempeño, sería conveniente estudiar en detalle eventuales implicancias adicionales que pudiera tener la idea que un cero de fase no mínima sea de tipo canónico izquierdo.
- El problema fundamental de esta tesis, a saber, el cómputo de límites de desempeño en control con estructura restringida, tiene todavía aristas importantes que no han sido exploradas. La más importante sin duda es la carencia de una solución para el caso general, es decir, aquel en que la planta no necesariamente posee la misma estructura que el controlador. Si bien dicho problema de optimización no es convexo, no se ha estudiado la eventual existencia de un óptimo global que se pueda obtener en forma explícita.
- En relación al punto anterior, tampoco se ha probado que las condiciones que aseguran la convexidad del problema de optimización sean necesarias para ello, por lo que el tema sigue abierto.
- Extender los resultados relativos a límites en desempeño para estructuras que no sean de tipo ralas (por ejemplo, restricciones en complejidad del controlador) es un tema de investigación atrayente.
- El fenómeno de direccionalidad en la influencia de los ceros de FNM en el desempeño óptimo con control restringido puede ser explorado con mayor profundidad. En particular, sería muy interesante obtener una forma explícita general para los vectores dirección asociados de modo tal de tener una idea más clara de cuáles interacciones dinámicas son las que en realmente limitan el mejor desempeño posible.
- Si bien se ha verificado que el método de diseño de controladores triangulares propuesto es de una utilidad considerable, éste es de carácter subóptimo. El paso siguiente a seguir es, entonces, incluir la estructura centralizada de la planta dentro del problema de optimización garantizando a la vez la estructura del controlador y la estabilidad del lazo.

- Finalmente, los rasgos secuenciales que se han dejado de manifiesto en la solución al problema de optimización cuadrática que involucra a planta y controlador triangulares puede tener alcances mayores. En efecto, es conveniente el estudio de las implicancias que este fenómeno pudiere tener con respecto a la metodologías clásicas de diseño secuencial.

# ESPACIOS DE HILBERT

## A.1. Introducción

En este apéndice se presentan en forma sintética resultados y conceptos importantes dentro del área de Análisis Funcional relativos a espacios de Hilbert que son importantes para la derivación de los principales resultados originales de este trabajo. Por motivos de espacio, se omiten las demostraciones pero, salvo se especifique explícitamente, éstas pueden ser encontradas en [92].

## A.2. Espacios de Hilbert y de Banach

### Definición A.1 (Espacio vectorial)

Dado un cuerpo  $\mathbb{K}$  y un conjunto  $E$ , se dice que  $E$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{K}$  si y sólo si en  $E$  existe una operación de suma denotada "+" tal que  $\forall a, b, c \in E$  se cumple

$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad (\text{A.2.1})$$

$$a + b = b + a, \quad (\text{A.2.2})$$

$$\exists 0 \in E \text{ tal que } a + 0 = a, \quad (\text{A.2.3})$$

$$\exists (-a) \in E \text{ tal que } a + (-a) = 0, \quad (\text{A.2.4})$$

y una operación externa definida  $\forall \alpha \in \mathbb{K}$  y  $\forall a \in E$  como

$$\mathcal{K} : \mathbb{K} \times E \mapsto E, \quad (\text{A.2.5})$$

$$(\alpha, a) \mapsto \mathcal{K}(\alpha, a) = \alpha a, \quad (\text{A.2.6})$$

y que satisface,  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$  y  $\forall a, b \in E$

$$\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a, \quad (\text{A.2.7})$$

$$(\alpha + \beta)(a) = \alpha a + \beta a, \quad (\text{A.2.8})$$

$$1a = a, \quad (\text{A.2.9})$$

$$\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b. \quad (\text{A.2.10})$$

**Definición A.2 (Subespacio vectorial)**

Dado  $E$  espacio vectorial sobre  $\mathbb{K}$ ,  $A \subset E$  se dirá subespacio vectorial de  $E \Leftrightarrow A$  es espacio vectorial.

Nótese que la definición anterior se reduce a que  $0 \in A$  y que  $\forall x, y \in A \alpha x \in A \forall \alpha \in \mathbb{K}$  y  $x + y \in A$ .

**Definición A.3 (Norma)**

Dado  $E$  espacio vectorial sobre  $\mathbb{K}$ , se denomina norma a una función

$$\|\cdot\| : E \mapsto \mathbb{R} \quad (\text{A.2.11})$$

que satisface

$$\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad (\text{A.2.12})$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \quad (\text{A.2.13})$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad (\text{A.2.14})$$

$\forall x, y \in E$  y  $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ .

**Definición A.4 (Espacio normado)**

Dado  $E$  espacio vectorial sobre  $\mathbb{K}$  y una norma  $\|\cdot\|$ , el par  $(E, \|\cdot\|)$  se denomina espacio normado.

**Definición A.5 (Producto interno)**

Dado  $E$  espacio vectorial sobre  $\mathbb{K}$ , un producto interno es una función continua

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \mapsto \mathbb{K} \quad (\text{A.2.15})$$

tal que  $\forall x, y, z \in E$  y  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$  satisface

$$\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, \quad (\text{A.2.16})$$

$$\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle, \quad (\text{A.2.17})$$

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}, \quad (\text{A.2.18})$$

$$\langle x, x \rangle \geq 0 \text{ si } \mathbb{K} \text{ es totalmente ordenado y } 0 \text{ es su neutro aditivo,} \quad (\text{A.2.19})$$

donde  $\bar{x}$  denota a una operación que en el caso de  $\mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$  corresponde a conjugar  $x$ .

### Definición A.6 (Espacio con producto interno)

Dado  $E$  espacio vectorial sobre  $\mathbb{K}$  y un producto interno, el par  $(E, \langle, \rangle)$  se denomina espacio con producto interno.

### Definición A.7 (Ortogonalidad)

Sea  $(E, \langle, \rangle)$  un espacio con producto interno:

(a) Dados  $x, y \in E$ , se dirá que  $x$  e  $y$  son ortogonales  $\Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$ . En estos casos se anotará  $x \perp y$ .

(b)  $x \in E$  se dirá ortogonal a  $A \subset E \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in A$ .

(c)  $A \subset E$  se dirá ortogonal a  $B \subset E \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0, \forall x \in A, \forall y \in B$ .

### Definición A.8 (Complemento ortogonal)

Dado  $(E, \langle, \rangle)$ , espacio con producto interno, y  $A \subset E$ , se define el complemento ortogonal de  $A$  como  $A^\perp$  donde,

$$A^\perp = \{z \in E \text{ tal que } z \perp A\} \quad (\text{A.2.20})$$

### Lema A.1 (Norma inducida partir de producto interno)

Dado un espacio con producto interno donde  $\mathbb{K} = \mathbb{R}^1$ , entonces la función

$$\|\cdot\|_i : E \mapsto \mathbb{R} \quad (\text{A.2.21})$$

$$x \mapsto \|x\|_i = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad (\text{A.2.22})$$

es una norma y se denomina norma inducida (por el producto interno correspondiente).

En lo que sigue se omitirá el subíndice  $i$  de normas inducidas a menos que sea estrictamente necesario.

El lema anterior establece que todo espacio con producto interno es, a su vez, un espacio normado en donde la norma correspondiente es la norma inducida por el producto interno.

<sup>1</sup>también puede relajarse la condición a que se cumpla sólo  $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$

Notar que la afirmación contraria es falsa, ya que hay normas no pueden ser inducidas por producto interno alguno, tal como ilustra el lema siguiente.

**Lema A.2 (Resultados de normas inducidas)**

Dado  $(E, \langle, \rangle)$  espacio con producto interno y  $(E, \|\cdot\|)$  espacio normado con la norma inducida por  $\langle, \rangle$ , entonces  $\forall x, y \in E$  se cumplen:

(a) Desigualdad de Cauchy-Schwartz:

$$-1 \leq \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \leq 1 \quad (\text{A.2.23})$$

(b) Identidad del Paralelógramo:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad (\text{A.2.24})$$

(c) Producto interno a partir de norma:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \{ \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 \} \quad (\text{A.2.25})$$

(d) Teorema de Pitágoras:

$$x \perp y \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad (\text{A.2.26})$$

Es importante tener presente que las propiedades anteriores sólo cobran sentido si la norma es inducida, ya que por ejemplo, la propiedad de Pitágoras no es aplicable en el contexto de una norma no inducida, pues no hay producto interno para verificar ortogonalidad. Por otro lado, lo anterior plantea condiciones necesarias para que una norma sea inducida: si, por ejemplo, la operación  $\langle, \rangle$  definida en (A.2.25) no satisface las propiedades del producto interno, entonces  $\|\cdot\|$  no será una norma inducida.

**Definición A.9 (Sucesión)**

Dado  $A$  un conjunto cualquiera, una sucesión en  $A$  se define como una función

$$f : \mathbb{N} \mapsto A \quad (\text{A.2.27})$$

$$n \mapsto f(n) = x_n \quad (\text{A.2.28})$$

y se denotará en la forma  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  o simplemente  $x_n$ .

**Definición A.10 (Sucesión convergente y límite)**

Dada  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  sucesión en  $(E, \|\cdot\|)$ , espacio normado, se dirá que  $x_n$  converge si  $\exists x \in E$

tal que  $\forall \epsilon, \exists n_o \in \mathbb{N}$  tal que  $\|x_n - x\| < \epsilon \forall n \geq n_o$ .  $x$  se define como el límite de la sucesión y para describir la convergencia se anota  $x_n \rightarrow x$

Debe notarse que la definición anterior está particularizada al caso de espacios normados, pero la idea de convergencia de sucesiones es más general, pudiéndose definir en espacios más generales (métricos o topológicos). Además, ésta indica que hay convergencia sólo si el punto al cual la sucesión tiende está contenido en el conjunto donde está definida la sucesión.

**Definición A.11 (Sucesión de Cauchy)**

$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  sucesión en  $(E, \|\cdot\|)$  se dice de Cauchy  $\Leftrightarrow \forall \epsilon, \exists n_o \in \mathbb{N}$  tal que  $\|x_n - x_m\| < \epsilon \forall n, m \geq n_o$

Es decir, una sucesión de Cauchy es aquella tienen algún término a partir del cual los términos siguiente se van acercando cada vez más entre si. Nótese que toda sucesión convergente es necesariamente de Cauchy, pero no al revés, ya que el punto al cual tienden los elementos de una sucesión de Cauchy podría no estar en  $E$  y, por lo tanto, no se cumple la definición A.10.

**Definición A.12 (Completitud)**

Un espacio vectorial con producto interno o normado se dice completo si y sólo si toda sucesión de Cauchy en  $E$  converge.

**Definición A.13 (Espacios de Hilbert y de Banach)**

Un espacio con producto interno  $(E, \langle, \rangle)$  (normado  $(E, \|\cdot\|)$ ), se dirá espacio de Hilbert (Banach) si y sólo si es completo.

**Definición A.14 (Suma Directa)**

Un espacio vectorial  $E$  se dice igual a la suma directa de los subespacios vectoriales  $Y, Z \subset E$   
 $\Leftrightarrow$

$$\forall x \in E \exists! y \in Y \wedge \exists! z \in Z \text{ tal que } x = y + z. \quad (\text{A.2.29})$$

En estos casos se anota  $E = Y \oplus Z$  y se dice que  $Y, Z$  forman un par complementario.

**Lema A.3 (Complemento ortogonal y suma directa)**

Sea  $A$  un subconjunto cerrado de  $E$ , con  $(E, \langle, \rangle)$  espacio de Hilbert. Entonces

$$E = A \oplus A^\perp \quad (\text{A.2.30})$$

En estos casos se dice que los conjuntos  $A$  y  $A^\perp$  forman un par ortogonal.

### A.3. Espacios de funciones

En esta sección se definen algunos espacios de funciones que son de utilidad en el desarrollo de los principales resultados de este trabajo.

#### A.3.1. El espacio $\mathcal{L}_2$

A continuación se define el espacio de funciones  $\mathcal{L}_2$  [7, 11, 14].

**Definición A.15:** Sea  $\mathbf{F}$  una función matricial compleja definida como

$$\mathbf{F} : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}^{n \times m} \quad (\text{A.3.1})$$

$$z \mapsto \mathbf{F}(z), \quad (\text{A.3.2})$$

y defínase  $\mathcal{F}$  como el conjunto de dichas funciones matriciales complejas.

El espacio  $\mathcal{L}_2$  se define como todas las funciones  $\mathbf{F} \in \mathcal{F}$  tales que:

- (a)  $\mathbf{F}(e^{j\omega})$  está bien definida  $\forall \omega \in [-\pi, \pi]$ .
- (b)  $\mathbf{F}(z)$  es integrable en la circunferencia unitaria ( $|z| = 1$ ).
- (c)  $\mathbf{F}(z)$  satisface

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{traza} \left\{ \mathbf{F}^H(e^{j\omega}) \mathbf{F}(e^{j\omega}) \right\} d\omega < \infty \quad (\text{A.3.3})$$

Es importante notar que la definición anterior es distinta a la usual en matemática [93], ya que extiende el dominio las funciones en  $\mathcal{L}_2$  a todo el plano complejo y no sólo a la circunferencia unitaria.

En base a la teoría expuesta en la sección anterior, se puede enunciar el siguiente teorema que recoge las propiedades más importantes de  $\mathcal{L}_2$ .

#### Teorema A.1 (Propiedades de $\mathcal{L}_2$ )

En relación a  $\mathcal{L}_2$  se tiene lo siguiente:

- (a)  $\mathcal{L}_2$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{C}$ .
- (b) La función

$$\begin{aligned} \langle, \rangle : \mathcal{L}_2 &\mapsto \mathbb{C} \\ (\mathbf{F}, \mathbf{H}) &\mapsto \langle \mathbf{F}, \mathbf{H} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{traza} \left\{ \mathbf{F}^H(e^{j\omega}) \mathbf{H}(e^{j\omega}) \right\} d\omega, \end{aligned} \quad (\text{A.3.4})$$

es un producto interno y el par  $(\mathcal{L}_2, \langle, \rangle)$  corresponde a un espacio vectorial con producto interno.

(c)  $\langle \mathbf{F}, \mathbf{F} \rangle \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{F} \in \mathcal{L}_2$  y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_2 : \mathcal{L}_2 &\mapsto \mathbb{R} \\ \mathbf{F} &\mapsto \|\mathbf{F}\|_2 = \sqrt{\langle \mathbf{F}, \mathbf{F} \rangle} \end{aligned} \quad (\text{A.3.5})$$

es una norma y el par  $(\mathcal{L}_2, \|\cdot\|_2)$  corresponde a un espacio normado.

(d) Con la norma y producto interno anteriores,  $\mathcal{L}_2$  es un espacio de Banach y Hilbert, respectivamente.

**Demostración:**

La demostración del teorema es directa en base a las definiciones hechas en la Sección A.2.

□□□

La norma en la parte (c) del teorema anterior se denomina norma 2 y a continuación se enuncia su definición formal junto con dos propiedades importantes de las cuales haremos uso exhaustivo para derivar los principales resultados de esta tesis.

**Definición A.16 (Norma 2)**

Sea  $\mathbf{F}(z) \in \mathcal{L}_2$ , entonces su norma 2 se define como

$$\|\mathbf{F}(z)\|_2 = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{traza} \left\{ \mathbf{F}^H(e^{j\omega}) \mathbf{F}(e^{j\omega}) \right\} d\omega \right)^{1/2} \quad (\text{A.3.6})$$

Además, la norma 2 tiene las siguiente propiedades:

(a) Si  $\mathbf{U}(z) \in \mathcal{L}_2$  tal que  $\mathbf{U}^H(e^{j\omega})\mathbf{U}(e^{j\omega}) = \mathbf{I}$  y el producto  $\mathbf{U}(z)\mathbf{F}(z)$  está bien definido, entonces  $\mathbf{U}(z)$  se denomina matriz unitaria y cumple

$$\|\mathbf{U}(z)\mathbf{F}(z)\|_2 = \|\mathbf{F}(z)\|_2, \quad \forall \mathbf{F}(z) \in \mathcal{L}_2 \quad (\text{A.3.7})$$

(b)

$$\|\mathbf{F}(z)\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \|F_{ij}(z)\|_2^2 \quad (\text{A.3.8})$$

**A.3.2. Subespacios importantes de  $\mathcal{L}_2$**

En la sección previa se ha visto que  $\mathcal{L}_2$  es un espacio de Hilbert. Esto se puede aprovechar para definir dos subespacios de funciones importantes que tienen la ventajosa propiedad de ser ortogonales.

**Lema A.4 (Subespacios  $\mathcal{H}_2^\perp$  y  $\mathcal{H}_2$ )**

Sea el espacio  $\mathcal{H}_2^\perp$  definido como

$$\mathcal{H}_2^\perp = \{\mathbf{F}(z) \in \mathcal{L}_2 : \mathbf{F}(z) \text{ es analítica } \forall z \text{ tal que } |z| < 1\}. \quad (\text{A.3.9})$$

Entonces:

- (a)  $\mathcal{H}_2^\perp$  es un subespacio cerrado de  $\mathcal{L}_2$ .
- (b)  $\mathcal{H}_2^\perp$  es completo y, por ende, es un espacio de Hilbert.
- (c) El espacio  $\mathcal{H}_2$  definido como

$$\mathcal{H}_2 = \{\mathbf{F}(z) \in \mathcal{L}_2 : \mathbf{F}(z) \text{ es analítica } \forall z \text{ tal que } |z| > 1\}, \quad (\text{A.3.10})$$

es el complemento ortogonal de  $\mathcal{H}_2^\perp$  y ambos subespacios forman un par ortogonal en  $\mathcal{L}_2$ .

**Demostración:**

- (a) Directa aplicando la definición de subespacio en la Sección A.2.
- (b) Este resultado es de gran importancia y su demostración puede ser encontrada en [93].
- (c) Directa aplicando la definición de complemento y par ortogonal en la Sección A.2.

□□□

A lo largo de esta tesis, para mantener una concordancia de notación con la literatura técnica existente, se usará el prefijo  $\mathcal{R}$  para recalcar que los espacios en cuestión contienen funciones matriciales complejas y racionales en  $z$ . Esto significa que para efectos de este trabajo, el espacio  $\mathcal{H}_2$  será denotado por  $\mathcal{RH}_2$ .

---

---

# NOTACIÓN Y SÍMBOLOS

A continuación se define la notación y símbolos usados frecuentemente en este documento. La intención de este cuadro resumen es servir sólo como guía, ya que las definiciones formales de cada elemento pueden encontrarse en las secciones respectivas (salvo la notación estándar).

$\mathbb{R}^n$	Conjunto de $n$ -tuplas reales
$\mathbb{C}^n$	Conjunto de $n$ -tuplas complejas
$\mathbb{C}^{n \times m}$	Conjunto de matrices con entradas complejas de dimensión $n \times m$
$e_i^n$	$i$ -ésimo vector de la base elemental de $\mathbb{R}^n$
$I$	Matriz identidad de dimensión apropiadas
$I_n$	Matriz identidad de dimensión $n \times n$
$0$	Matriz nula de dimensión apropiada
$0_n$	Matriz nula de dimensión $n \times n$
$0_{n \times m}$	Matriz nula de dimensión $n \times m$
$1_{k\ell}$	Matriz dimensión apropiada con todos sus elementos nulos, salvo el $(k, \ell)$ , en el cual tiene un uno
$A(z)$	Matriz de transferencia
$\text{diag}\{\mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{22}, \dots, \mathbf{A}_{nn}\}$	Matriz diagonal por bloques con las matrices $\mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{22}, \dots, \mathbf{A}_{nn}$ en cada bloque
$\{A_{ii}\}_{i=1,2,\dots,n}$	Idem
$[A]_{ij}$ ( $[A]_{i,j}$ )	Elemento $(i, j)$ de la matriz $\mathbf{A}$
$A_{ij}$ ( $A_{i,j}$ )	Idem
$[A]_{i*}$ ( $[A]_{i,*}$ )	$i$ -ésima columna de la matriz $\mathbf{A}$
$A_{i*}$	Idem

$\mathbf{A}_\ell$	Submatriz $\ell$ de la matriz $\mathbf{A}$
$[\mathbf{A}]_d$	Porción diagonal de la matriz $\mathbf{A}$
$\det \{\mathbf{A}\}$	Determinante de la matriz $\mathbf{A}$
$\text{traza} \{\mathbf{A}\}$	traza de la matriz $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}^{-1}$	Inversa multiplicativa de la matriz $\mathbf{A}$
$v_i$	$i$ -ésima componente del vector $\mathbf{v}$
$(\cdot)^T$	Operador transpuesto
$(\cdot)^H$	Operador hermitiano
$\overline{(\cdot)}$	Operador complejo conjugado
$ x $	magnitud de $x \in \mathbb{C}$
$\ \mathbf{x}\ $	magnitud de $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$
$g_{rel} \{\mathbf{A}(z)\}$	Grado relativo de $\mathbf{A}(z)$
$den \{A(z)\}$	Denominador de la función de transferencia $A(z)$
$gr \{p(z)\}$	Grado u orden del polinomio $p(z)$
$\mathcal{L}_2$	Espacio de funciones matriciales definidas y medibles sobre círculo unitario y cuadráticamente integrables
$\mathcal{H}_2$	Subespacio de $\mathcal{L}_2$ de funciones matriciales analíticas fuera del círculo unitario
$\mathcal{RH}_2$	Subespacio de $\mathcal{L}_2$ de funciones matriciales analíticas dentro del círculo unitario
$\mathcal{RX}$	(Sub)espacio $\mathcal{X}$ restringido al caso real racional
$\mathcal{RH}_\infty$	Espacio de matrices de transferencia estables y propias
$\mathcal{S}$	Conjunto de restricciones estructurales genérico
$\ A\ _2$	norma en $\mathcal{L}_2$
$[\mathbf{A}(z)]_2, [\mathbf{A}(z)]_\perp$	porciones en $\mathcal{RH}_2$ y $\mathcal{RH}_2^\perp$ , respectivamente, de $\mathbf{A}(z) \in \mathcal{L}_2$
$\mathbf{Q}(z)$	Parámetro de Youla
$\mathbf{C}(z)$	Controlador en un lazo de control
$\mathbf{S}_o(z)$	Función de sensibilidad en un lazo de control
$\mathbf{T}_o(z)$	Función de sensibilidad complementaria en un lazo de control
$\mathbf{S}_{io}(z)$	Función de sensibilidad de entrada en un lazo de control
$\mathbf{S}_{uo}(z)$	Función de sensibilidad de control en un lazo de control
$\mathbf{r}(t)$	Señal de referencia en un lazo
$\mathbf{u}(t)$	Señal de actuación en un lazo (excitación de un proceso)
$\mathbf{y}(t)$	Salida de un proceso
$\mathbf{y}_m(t)$	Señal realimentada en un lazo de control

$e(t)$	Señal de error en un lazo de control
$d_m(t)$	Ruido de medición en un lazo de control
$d_i(t)$	Perturbación de entrada en un lazo de control
$d_o(t)$	Perturbación de salida en un lazo de control
$\mu(t)$	Función escalón unitario
$X(z) = \mathcal{Z}\{x(t)\}$	Transformada $\mathcal{Z}$ de la secuencia $x(t)$
$\eta$	Dirección izquierda genérica de ceros de funciones de transferencia
$\mu$	Dirección derecha genérica de polos de funciones de transferencia
$\alpha_c$	Multiplicidad algebraica del cero en $z = c$
$\mathcal{E}\{\cdot\}$	Operador esperanza
$N_I(z), (N_D)$	Numerador izquierdo (derecho) de una factorización coprima izquierda (derecha)
$D_I(z), (D_D)$	Denominador izquierdo (derecho) de una factorización coprima izquierda (derecha)
$\xi_A(z)$	Interactor unitario de ceros generalizado de $A(z)$
$\mathcal{C}$	Conjunto de ceros de FNM asociado a una matriz de transferencia
$\mathcal{P}$	Conjunto de polos inestables asociado a una matriz de transferencia
$(\cdot)_{opt}$	Denota la optimalidad de $(\cdot)$
$\Phi$	Matriz de Participación asociada a cierto sistema
MP	Abreviatura para <i>Matriz de Participación</i>
GLI	Abreviatura para <i>interactor de ceros generalizado izquierdo</i>
LUI (GUI)	Abreviatura para <i>interactor unitario de ceros izquierdo (derecho)</i>
GLUI (GRUI)	Abreviatura para <i>interactor unitario de ceros generalizado izquierdo (derecho)</i>
CRE	Abreviatura para <i>Conjunto de Restricción Estructural</i>
c. e. t. p.	Abreviatura para <i>casi en todas partes</i>

---

---

# BIBLIOGRAFÍA

- [1] M. Salgado, D. R. Oyarzún, and E. Silva, “On affine parametrization and essential sensitivity,” *Submitted to Journal of the Franklin Institute*, 2005.
- [2] E. Silva, D. R. Oyarzún, and M. Salgado, “On structural properties of a class of  $\mathcal{H}_2$  optimal control problems,” *Submitted to IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, 2005.
- [3] D. R. Oyarzún, E. Silva, and M. Salgado, “Performance bound evaluation for sparse structure restricted control systems,” *Submitted to IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, 2005.
- [4] D. Youla, H. Jabr, and J. Bongiorno, “Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers. Part I,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 21, no. 2, pp. 3–13, 1976.
- [5] —, “Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers. Part II: The multivariable case,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 21, no. 3, pp. 319–338, 1976.
- [6] G. C. Goodwin, S. Graebe, and M. E. Salgado, *Control System Design*. New Jersey: Prentice Hall, 2001.
- [7] M. Morari and E. Zafiriou, *Robust process control*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall Inc., 1989.
- [8] J. Doyle, B. Francis, and A. Tannembaum, *Feedback control Theory*. New York: Macmillan Publishing Company, 1992.
- [9] K. Zhou, J. Doyle, and K. Glover, *Robust and optimal control*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1996.
- [10] J. Chen, L. Qiu, and O. Toker, “Limitations on maximal tracking accuracy,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45, no. 2, pp. 326–331, 2000.
- [11] O. Toker, L. Chen, and L. Qiu, “Tracking performance limitations in LTI multivariable discrete-time systems,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems—Part I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 49, no. 5, pp. 657–670, May 2002.
- [12] E. Silva and M. Salgado, “Performance bounds for feedback control of nonminimum-phase MIMO systems with arbitrary delay structure,” *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, vol. 152, no. 2, pp. 211–219, March 2005.

- [13] M. Salgado and E. Silva, “Robustness issues in  $\mathcal{H}_2$  optimal control of unstable plants,” *Systems & Control Letters*, vol. 55, no. 2, pp. 124 – 131, February 2006 (available online).
- [14] K. Zhou and J. Doyle, *Essentials of Robust Control*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1998.
- [15] S. Skogestad and I. Postlethwaite, *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*. New York: Wiley, 1996.
- [16] J. Doyle, K. Glover, P. Khargonekar, and B. Francis, “State–space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-34, no. 8, pp. 831–847, 1989.
- [17] M. Salgado, R. Musalem, and E. Silva, “Parametrización alternativa de youla,” *Revista de Ingeniería U. de Tarapacá*, Agosto 2004.
- [18] M. M. Seron, J. H. Braslavsky, and G. C. Goodwin, *Fundamental Limitations in Filtering and Control*. London: Springer Verlag, 1997.
- [19] W. Wolowich and P. Falb, “Invariants and canonical forms under dynamic compensation,” *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 14, no. 6, pp. 996–1008, November 1976.
- [20] G. Goodwin and K. Sin, *Adaptive Filtering Prediction and Control*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1984.
- [21] S. Shah, C. Mothadi, and D. Clarke, “Multivariable adaptive control without a prior knowledge of the delay matrix,” *Systems and Control Letters*, vol. 9, pp. 295–306, 1987.
- [22] M. Rogozinsky, P. Paplinski, and M. Gibbard, “An algorithm for the calculation of a nilpotent interactor matrix for linear multivariable systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 32, no. 3, pp. 234–237, March 1987.
- [23] B. Huang, S. Shah, and H. Fujii, “The unitary interactor matrix and its estimation using closed loop data,” *J. Process Control*, vol. 7, no. 3, pp. 195–207, 1997.
- [24] Y. Peng and M. Kinnaert, “Explicit solution to the singular LQ regulation problem,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 37, no. 5, pp. 633–636, May 1992.
- [25] H. Kwakernaak and R. Sivan, *Linear Optimal Control Systems*. New York: Wiley–Interscience, 1972.
- [26] B. Huang, S. Shah, and R. Miller, “Feedforward plus feedback controller performance assessment of MIMO systems,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 8, no. 3, pp. 580–587, May 2000.
- [27] K. Havre, “Studies on controllability analysis and control structure design,” Ph.D. dissertation, Department of Chemical Engineering Norwegian, University of Science and Technology, 1998.
- [28] E. Silva, “Cotas de desempeño para lazos multivariables con controladores de estructura restringida: una primera aproximación,” Master’s thesis, Departamento de Electrónica, Universidad Técnica Federico Santa María, 2004.

- [29] R. P. Singh and K. S. Narendra, "Prior information in the design of multivariable adaptive controllers," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 29, no. 12, pp. 1108–1111, December 1984.
- [30] C. Tsiliogiannis and S. Svoronos, "Multivariable self-tuning control via the right interactor matrix," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 31, no. 10, pp. 987–989, October 1986.
- [31] G. Gómez and G. Goodwin, "Integral constraints on sensitivity vectors for multivariable linear systems," *Automatica*, vol. 32, no. 4, pp. 499–518, 1996.
- [32] T. Harris, F. Boudreau, and J. MacGregor, "Performance assessment of multivariable feedback controllers," *Automatica*, vol. 32, pp. 1505–1518, 1996.
- [33] A. Conley, "Control descentralizado y medidas de interacción," Master's thesis, Department of Electrical Engineering, Universidad Técnica Federico Santa María, 2000.
- [34] M. Salgado and A. Conley, "MIMO interaction measure and controller structure selection," *International Journal of Control*, vol. 77, no. 4, pp. 367–383, March 2004.
- [35] N. Sandell, P. Varaiya, M. Athans, and M. Safonov, "Survey of decentralized control methods for large scale systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 23, no. 2, pp. 108–128, 1978.
- [36] E. H. Bristol, "On a new measure of interaction for multivariable process control," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 11, pp. 133–134, 1966.
- [37] M. F. Witcher and T. J. McAvoy, "Interacting control systems: Steady state and dynamic measure of interaction," *ISA Transactions*, vol. 16, no. 3, pp. 35–41, 1977.
- [38] E. H. Bristol, "Recent results on interaction in multivariable process control," *71st AIChE Conf.*, 1978.
- [39] A. Niederlinski, "A heuristic approach to the design of linear multivariable interacting control systems," *Automatica*, vol. 7, pp. 691–701, 1971.
- [40] M. E. Salgado and D. R. Oyarzún, "MIMO interactions in sampled-data systems," in *16th IFAC World Congress*, 2005.
- [41] W. Su, L. Qiu, and J. Chen, "Fundamental performance limitations in tracking sinusoidal signals," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 48, no. 8, pp. 1371–1380, August 2003.
- [42] J. Chen, S. Hara, and G. Chen, "Best tracking and regulation performance under control effort constraint," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 48, no. 8, pp. 1320–1380, August 2003.
- [43] G. Goodwin, M. Salgado, and J. Yuz, "Performance limitations for linear feedback systems in the presence of plant uncertainty," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 48, no. 8, August 2003.
- [44] J. Yuz and G. Goodwin, "Loop performance assessment for decentralized control of stable linear systems," *European Journal of Control*, vol. 9, no. 1, pp. 118–132, 2003.

- [45] K. Havre and S. Skogestad, "Achievable performance of multivariable systems with unstable zeros and poles," *International Journal of Control*, vol. 74, pp. 1131–1139, 2001.
- [46] V. Kariwala, S. Skogestad, J. F. Forbes, and E. S. Meadows, "Achievable input performance of linear systems under feedback control," *International Journal of Control*, vol. 78, pp. 1327–1341, 2005.
- [47] V. Kariwala, "Multi-loop controller design and performance analysis," Ph.D. dissertation, Chemical and Materials Engineering, University of Alberta, 2004.
- [48] R. Date and J. Chow, "Decentralized stable factors and a parameterization of decentralized controllers," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 39, no. 2, pp. 347–351, February 1994.
- [49] ———, "A reliable coordinated decentralized control system design," in *Proceedings of the 28th Conference on Decision and Control*, Tampa, Florida, USA, 1989, pp. 1295–1300.
- [50] ———, "A parameterization approach to optimal  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  decentralized control problems," *Automatica*, vol. 29, no. 2, pp. 457–463, February 1993.
- [51] R. L. Kosut, "Suboptimal control of linear time-invariant systems subject to control structure constraints," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 15, no. 5, pp. 557–563, October 1970.
- [52] A. Iftar and U. Ozguner, "An optimal control approach to the decentralized robust servomechanism problem," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 34, no. 12, pp. 1268–1272, December 1989.
- [53] A. V. Savkin and I. R. Petersen, "Optimal stabilization of linear systems via decentralized output feedback," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 43, no. 2, pp. 292–294, 1998.
- [54] J. C. Geromel, J. Bernussou, and M. C. de Oliveira, " $\mathcal{H}_2$ -norm optimization with constrained dynamic output feedback controllers: Decentralized and reliable control," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, no. 7, pp. 1449–1454, July 1999.
- [55] G. Goodwin, M. Serón, and M. Salgado, " $H_2$  design of decentralized controllers," in *Proceedings of the American Control Conference*, June 1999, San Diego - California.
- [56] M. Salgado and E. Silva, "A class of optimal decentralized controllers for open loop stable processes," in *16th IFAC World Congress*, Prague, Chz. Rep., July 2005.
- [57] R. J. Veillette, J. V. Medanic, and W. R. Perkins, "Design of reliable control systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 37, no. 3, pp. 290–304, March 1992.
- [58] J.-K. Shiau and J. Chow, "Structurally constrained  $\mathcal{H}_\infty$  suboptimal control design using an iterative linear matrix inequality algorithm based on a dual design formulation," *Tamkang Journal of Science and Engineering*, vol. 1, no. 2, pp. 133–143, 1998.
- [59] G. Zhai, M. Ikeda, and Y. Fujisaki, "Decentralized  $\mathcal{H}_\infty$  controller design: a matrix inequality approach using a homotopy method," *Automatica*, vol. 37, pp. 565–572, 2001.

- [60] C. Mehendale and K. Grigoriadis, "A homotopy method for decentralized control design," in *Proceedings of the American Control Conference*, Denver, Colorado, USA, June 2003, pp. 5023–5027.
- [61] X. Qi, M. Salapaka, P. Voulgaris, and M. Khammash, "Structured optimal and robust control with multiple criteria: A convex solution," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 49, no. 10, pp. 1623 – 1640, October 2004.
- [62] M. Rotkowitz and S. Lall, "On computation of optimal controllers subject to quadratically invariant sparsity constraints," in *American Control Conference*, 2004.
- [63] F. Claveau and P. Chevrel, "A sequential design methodology for large-scale LBT systems," in *Proceedings of the American Control Conference*, 2005.
- [64] D. Mayne, "Sequential design of linear multivariable systems," *Proc. of the IEEE*, pp. 568–572, 1979.
- [65] M. Hovd and S. Skogestad, "Sequential design of decentralized controllers," *Automatica*, pp. 1601–1607, 1994.
- [66] G. Bryant and L. F. Yeung, "New sequential design procedures for multivariable systems based on Gauss-Jordan factorization," *IEE Proceedings-Control Theory Appl.*, vol. 141, no. 5, pp. 427–436, 1994.
- [67] T. Kailath, *Linear Systems*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1980.
- [68] J. M. Maciejowski, *Multivariable Feedback Design*. Wokingham, England: Addison Wesley, 1989.
- [69] B. Lathi, *Signal Processing and Linear Systems*. Berkeley-Cambridge Press, 1998.
- [70] C. Desoer, R. Liu, J. Murray, and R. Sacks, "Feedback systems design: The fractional representation approach to analysis and sythesis," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 25, no. 3, pp. 399–412, 1980.
- [71] A. MacFarlane and N. Karcanias, "Poles and zeros of linear multivariable systems: a survey of the algebraic, geometric and complex variable theory," *International Journal of Control*, vol. 24, no. 1, pp. 33–74, 1976.
- [72] K. J. Åström and B. Wittenmark, *Computer controlled systems. Theory and design*, 3rd ed. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1997.
- [73] M. Vidyasagar, *Control systems synthesis: A Factorization Approach*. Cambridge, Mass: MIT Press, 1985.
- [74] R. Horn and C. Johnson, *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.
- [75] J. Chen, "Logarithmic integrals, interpolation bounds and performance limitations in MIMO feedback systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45, no. 6, pp. 1098–1115, 2000.
- [76] M. E. Salgado, J. I. Yuz, and R. Rojas, *Análisis de Sistemas Lineales*. Prentice-Hall, 2005.

- [77] M. Grimble, "Restricted structure LQG optimal control for continuous-time systems," *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, vol. 147, no. 2, pp. 185–195, March 2000.
- [78] M. J. Grimble, "Restricted structure controller tuning and performance assessment," *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, 2002.
- [79] D. Greenwood, M. Johnson, and M. J. Grimble, "Multivariable LQG optimal control—restricted structure control for benchmark and tuning," in *European Control Conference*, Cambridge, UK, 2003.
- [80] M. J. Grimble, "Optimal restricted structure control with prespecified gain or phase margins," *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, 2004.
- [81] P. Voulgaris, "A convex characterization of classes of problems in control with specific interaction and communication structures," in *American Control Conference*, June 2001, pp. 3128 – 3133, Arlington, VA.
- [82] —, "Optimal control of systems with delayed observation sharing patterns via input-output methods," *Systems and Control Letters*, vol. 50, pp. 51–64, 2003.
- [83] B. Bamieh and P. Voulgaris, "A convex characterization of distributed control problems in spatially invariant systems with communication constraints," *System and Control Letters*, vol. 54, pp. 575–583, 2005.
- [84] M. Rotkowitz and S. Lall, "Decentralized control information structures preserved under feedback," in *41st IEEE Conference on Decision and Control*, Las Vegas, Nevada, USA, 2002.
- [85] —, "Decentralized control of unstable systems and quadratically invariant information constraints," in *42nd IEEE Conference on Decision and Control*, Hawaii, USA, 2003.
- [86] D. Surlas and V. Manousiousthakis, "Best achievable decentralized performance," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 40, no. 11, pp. 1858–1871, November 1995.
- [87] M. B. Priestley, *Spectral Analysis and Time Series*. London: Academic Press, 1989.
- [88] J. Freudenberg and D. Looze, *Frequency Domain Properties of Scalar and Multivariable Feedback Systems*, ser. Lecture Notes in Control and Information Sciences. New York: Springer Verlag, 1988.
- [89] M. Rotkowitz, "Tractable problems in optimal decentralized control," Ph.D. dissertation, Stanford University, 2005.
- [90] M. Rotkowitz and S. Lall, "Decentralized control subject to communication and propagation delays," in *43rd IEEE Conference on Decision and Control*, 2004.
- [91] D. Luenberger, *Optimization by Vector Space Methods*. London: John Wiley and Sons, Inc., 1969.
- [92] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley and Sons, Inc., 1998.
- [93] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 3rd ed. New York: McGraw Hill Book Company, 1987.